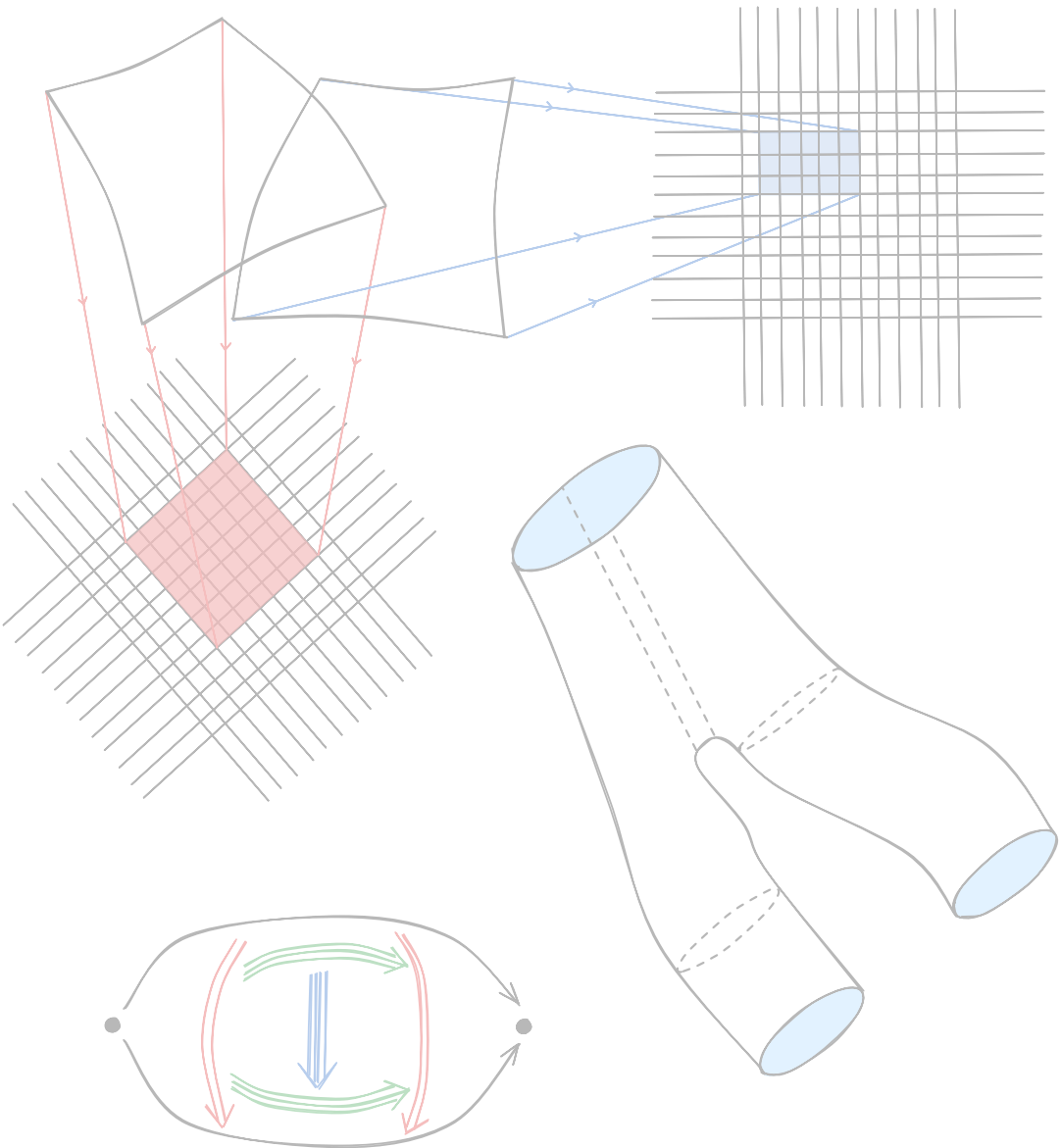


(Theoretische) fysica: van vroeger tot nu

N. Dewolf



Inhoudsopgave

1	Terug naar de schoolbanken met Newton	7
2	Vertalen met Lagrange, Hamilton & Poisson	25
3	Meetkunde van Gauss tot Einstein	47
4	Kwantummechanica met Dirac	69
5	Veldentheorie met Yang & Mills	89
6	Vloeistofmechanica & filosofie met Lawvere	107
7	To infinity and beyond	125
8	Epiloog	137

Inleiding

Ik herinner me nog de lessen fysica uit het middelbaar. Elk jaar kwam de leerkracht wel af met nieuwe formules die uit de lucht kwamen vallen. Spijtig genoeg is dit vaak het lot van fysica op school. Voor leerlingen is dit niet altijd makkelijk te begrijpen, maar deze manier van onderwijzen is niet de schuld van leerkrachten of een gedateerd curriculum. Ook al wordt vaak gezegd dat de natuurkunde slechts uit een handvol principes kan worden afgeleid, een opleiding tot fysicus leert je ook dat dit zowel een groot abstractievermogen als een goede intuïtie vereist. En het zijn net deze dingen die moeilijk aan te leren vallen op school, er is gewoon onvoldoende ruimte en tijd!

De bedoeling van dit boek is om enkele ideeën uit de (theoretische) fysica te nemen en deze te kaderen binnen wat we als leerling op school geleerd hebben, wat de meeste fysici erover weten en hoe dit past binnen de wiskunde van de 21^e eeuw. Want ja hoor, het was niet enkel ten tijde van Newton dat de wiskunde sterk beïnvloed werd door de wetenschap, in het bijzonder de fysica. Enkele van de meest opvallende en exotische concepten uit de hedendaagse wiskunde vinden hun oorsprong in de natuurkunde en, omgekeerd, hebben doorbraken in de wiskunde vaak geleid tot belangrijke doorbraken in de fysica, of om het met Wigners woorden te zeggen [9]: *“the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences.”*

Het idee voor dit boek vindt zijn oorsprong op meerdere plekken. Als eerste een jarenlange passie voor wiskunde en natuurkunde, met in het bijzonder een voorliefde voor de theoretische fysica van de afgelopen 50 jaar. In het middelbaar stop je eigenlijk waar de fysica stond aan het begin van de 20^e eeuw, wat dus alweer een dikke eeuw geleden is. Naast een interesse in de theorie die je niet op school (of zelfs de universiteit) te zien krijgt, is hier ook een pedagogisch aspect aan verbonden. Niets is leuker dan anderen kunnen vertellen over alle wonderen in het universum en een boek (of een terloopse, uit de hand gelopen blogpost) is hier nog steeds het beste medium voor. Hier is er nu eenmaal wel ruimte en tijd om alles in meer detail uit de doeken te doen.

De nadruk doorheen de tekst zal voornamelijk liggen op het introduceren van concepten en ideeën. Alhoewel er voldoende formules zullen voorkomen, was het niet de bedoeling om deze te technisch of langdradig te maken. Met een basis aan middelbare wiskunde (optellen, vermenigvuldigen, ...) en een hoopje goede moed zou je alles moeten kunnen volgen. Uiteraard zal dit vereisen dat we hier en daar wat details onder de mat vegen, maar enkel als we kunnen beargumenteren waarom dat acceptabel is. Dit is dan ook wat van jou een goede fysicus zou maken. Het enige wat wel vastligt is dat de abstractie en complexiteit in elk hoofdstuk een beetje zal toenemen. Belangrijke termen die doorheen de tekst worden ingevoerd zullen in het **blauw** worden aangeduid om de aandacht te vestigen.

Opfrisser

Voor de lezers die toch al een tijdje geleden de schoolbanken verlaten hebben of niet altijd even goed opgelet hebben, bespreken we hier nog eens kort de vereiste wiskunde (en voeren we terloops al wat noodzakelijke notaties in).

- De vermenigvuldiging zullen we soms met een puntje noteren, zoals $5 \cdot 7$, maar wanneer het duidelijk is, zullen we de vermenigvuldiging volledig impliciet laten, bijvoorbeeld λx .
- Langere sommen zullen we noteren met het sommatieteken:

$$\sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

- De samenstelling van twee functies wordt aangeduid met een klein cirkeltje: $f \circ g(x) := f(g(x))$.
- Een functie $f : X \rightarrow Y$ wordt inverteerbaar genoemd wanneer je voor elk element $y \in Y$ een en slechts een element $x \in X$ kan vinden zodat $f(x) = y$. De inverse (functie) wordt dan ook genoteerd als $f^{-1} : Y \rightarrow X$.
- Het bestaan van een inverse functie is een verfijning van het concept van gelijkheid (hier komen we later in dit boek nog op terug). Twee objecten hoeven niet exact gelijk te zijn om ze toch als equivalent te beschouwen. Zo zijn de cirkel S^1 en de verzameling $SO(2)$ van rotaties in twee dimensies equivalent in deze zin, er bestaat een inverteerbare functie tussen. Zo een equivalentie of **isomorfisme** zullen we aan duiden als $X \cong Y$.
- Veeltermen zijn uitdrukkingen (of functies) zoals

$$5x^7 - 3x^3 + 2 \quad \text{of} \quad -12x^2y + xyz - 2z^2.$$

Het zijn eindige sommen van eindige producten in enkele onbekenden. Je kan deze optellen en vermenigvuldigen door gebruik te maken van distributiviteit:

$$(a + b)(x + y) = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

- De belangrijkste getallenverzamelingen krijgen allemaal een eigen symbool: \mathbb{N} voor de natuurlijke getallen $(0, 1, 2, \dots)$, \mathbb{Z} voor de gehele getallen $(\dots, -1, 0, 1, \dots)$, \mathbb{R} voor de reële getallen en \mathbb{C} voor de complexe getallen die we in Hoofdstuk 4 zullen tegenkomen.
- De faculteit van een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ is gedefinieerd als het product van n met alle natuurlijke getallen die kleiner zijn dan n :

$$n! := n(n - 1) \cdots 2 \cdot 1.$$

(Een uitbreiding naar \mathbb{R} en \mathbb{C} bestaat ook, maar die is niet relevant voor ons.)

- Als we een som hebben in machten van factor x , dan gebruiken we soms de 'grote O '-notatie

$$f(x) = ax + bx^2 + \dots + O(x^n).$$

Dit wil zeggen dat de laatste belangrijke bijdrage van de grootteorde x^n is. Er kunnen termen met hogere machten aanwezig zijn, maar deze zijn irrelevant.

Hoofdstuk 1

Terug naar de schoolbanken met Newton

Om al het schoons uit de fysica te kunnen bewonderen, moeten we natuurlijk wel beginnen bij het begin. Dit betekent dat we wat lessen uit de middelbare school zullen moeten herbeleven. Voor de lessen fysica zullen we terugkeren naar de 2^e graad en voor de lessen wiskunde voornamelijk naar de 3^e graad. Dit geeft eigenlijk al mooi weer waarom natuurkunde op school soms zo chaotisch of onlogisch lijkt. Je ziet vaak de nodige wiskunde pas te laat.

Twee centrale concepten binnen de natuurkunde zijn kracht en energie. Ook op school worden deze in geuren en kleuren besproken, zowel conceptueel als in formules. In alle vormen en maten komen ze aan bod: zwaartekracht, veerkracht, wrijvingskracht, kinetische en potentiële energie, ... Ga zo maar door. Als je er genoeg gezien hebt (en hopelijk goed opgelet hebt in de les), dan kan je er soms wel eens wat logica of regelmaat in opmerken en het zijn net dit soort wetmatigheden waar fysici naar op zoek zijn en die we in dit boek zullen bespreken.

Maar laten we eerst echt beginnen bij het begin (of althans een mogelijk begin). Wat moeten we ons voorstellen bij energie? Wanneer je wil sporten, dan kan je maar beter voldoende gegeten hebben of je valt nog flauw. Je lichaam en spieren hebben die energie nodig om een inspanning te kunnen leveren. Als je iets zwaars de trap wil op dragen, dan merk je vaak dat dit ook wat energie kost. Of een raceauto, die heeft brandstof (of een grote batterij) nodig om snel te kunnen rijden. Op het einde van de dag vallen al deze situaties op dezelfde manier te beschrijven: energie wordt van een vorm omgezet in een andere. Van bijvoorbeeld de chemische energie in eten naar de kinetische energie van jouw lichaam in het eerste voorbeeld, of naar de potentiële energie in het tweede door de zwaartekracht tegen te werken (hier heb je al een eerste link tussen kracht en energie).

Hieronder zie je voor de nostalgie enkele formules die je waarschijnlijk ooit wel eens in het klaslokaal gezien hebt:

- Kinetische energie van een massa m die aan een snelheid v vooruit beweegt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

- Potentiële energie van een massa m die zich op een hoogte h boven het aardoppervlak bevindt:

$$E_g = mgh.$$

- Veerenergie van een veer die over een afstand x wordt uitgerekt (of ingedrukt):

$$E_{\text{veer}} = \frac{1}{2}kx^2.$$

- Elektrische energie van een condensator bij een aangelegde spanning V :

$$E_{\text{elek}} = \frac{1}{2}CV^2.$$

Dat drie van de vier uitdrukking dezelfde vorm hebben, is uiteraard geen toeval. Hier komen we later dan ook nog op terug wanneer we krachten besproken hebben. Dan zal ook duidelijk worden waarom zelfs de zwaartekracht binnen het rijtje past.

Dus hoe zit het nu eigenlijk met die krachten? Elke keer wanneer je een object probeert te verplaatsen of tegen te houden, oefen je er een kracht op uit. Dat kracht en (verandering van) beweging samengaan is een van de inzichten die onder meer Newton ertoe brachten zijn gelauwerde wetten neer te pennen. Bovendien, zoals je zelf waarschijnlijk wel al hebt gemerkt, moet je meer kracht uitoefenen des te zwaarder het object is. Newton heeft ons uiteraard meer gegeven dan deze kwalitatieve inzichten. Zijn wetten laten ons toe problemen analytisch te behandelen en kwantitatief op te lossen. Hieronder zien we ze in volle glorie:

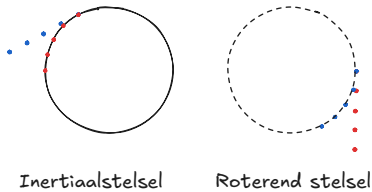
1. Een object in uniforme beweging blijft in uniforme beweging tenzij er (netto) een kracht op inwerkt.
2. Een kracht F geeft aanleiding tot een versnelling a als volgt:

$$F = ma .$$

3. Elke kracht gaat gepaard met een reactiekracht.

Vooraleer we verder ingaan op de wiskunde achter deze wetten (voornamelijk de tweede wet), laat ons eens kijken wat deze wetten betekenen. In de tijd van de oude Grieken, toen natuurkunde en wetenschap in het algemeen nog eerder een onderdeel van de filosofie waren, wist men reeds dat er een relatie tussen kracht en beweging moest bestaan. Dit hield perfect steek. Eender welk object bleef in stilstand tenzij je er op duwde. Maar, indien je stopte met duwen, kwam het object uiteindelijk terug tot stilstand. Niet alleen is deze redenering echter te kwalitatief van aard om ermee te kunnen rekenen, ze is ook niet volledig waterdicht. Stel je eens voor dat er geen wrijvingskracht is tussen het object en grond (een van de favoriete aannames van elke fysicus) door het bijvoorbeeld op rolschaatsen of glad ijs te plaatsen. Indien je stopt met duwen zal het object mooi door blijven

bewegen. Het is dus nodig om precies te zeggen wat ‘beweging’ nu echt inhoudt.



Figuur 1.1: Schijnkrachten in roterend referentiestelsel.

De eerste wet kadert die eerste observatie van de Grieken. Indien er geen kracht in het spel is, zal een object blijven bewegen aan de snelheid waarmee het reeds bewoog. In het bijzonder zal het dus in rust blijven als het stilstond. Maar, deze wet zegt eigenlijk nog meer. Als er netto geen krachten inwerken, dan bestaat er een referentiestel-

sel waarin het object in rust is. Een dergelijk referentiestelsel, waarin Newton zijn wetten gelden, heet een **inertiaalstelsel**. Het beste voorbeeld van een niet-inertiaalstelsel is een roterend referentiestelsel zoals wanneer je ronddraait op een kermisattractie. Stel dat je een rugzak mee had en deze, terwijl de attractie ronddraait, loslaat, dan treden twee effecten op (zie de figuur hiernaast: blauw is het pad van de rugzak, rood is het pad van de roterende waarnemer). Enerzijds de gekende centrifugaalkracht, waardoor de rugzak van jou weg beweegt, en anderzijds het corioliseffect waardoor de rugzak niet enkel naar buiten vliegt, maar waardoor zijn baan ook naar achter lijkt te krommen. Toch zijn dit geen echte krachten. De rugzak beweegt in een mooie rechte lijn, jij bent degene die roteert.

Die inertie (of traagheid), de mate waarmee een object zich verzet tegen een verandering in zijn beweging, vormt het onderwerp van de tweede wet. Het wordt voorgesteld door de massa van het object. Deze verbindt de twee luiken van het verhaal, kracht en beweging, met elkaar. Want zoals je weet, een massief object verplaatsen kost meer moeite dan een licht object verplaatsen. Gelukkig is de tweede wet zo simpel als ze kon zijn: je deelt de kracht door de massa en je krijgt de versnelling. Had ze veel complexer kunnen zijn? Zeker en vast! Maar zoals wel vaker gebeurt in de fysica beginnen we met de eenvoudigste formules, kijken we hoe ver

we hiermee geraken en is het universum ons gunstig gezind. (Of zo leek het toch voor lange tijd.)

De derde en laatste wet volgt uit de volgende observatie. Als je aan het lopen bent en je botst ergens tegenaan, dan zal je dat object misschien wel wat doen bewegen, je oefent er immers een kracht op uit (conform Wet 2), maar zelf zal je ook vertragen of terugstuiten. Volgens de eerste wet kan dit echter enkel als er een kracht op jou inwerkt, de reactiekracht. Dat deze bestaat en even groot is als de oorspronkelijke kracht (met tegengestelde zin), dat is de inhoud van die derde wet.

Aan de hand van deze drie principes kon Newton zo goed als alle problemen uit zijn tijd oplossen. Het enige dat voor ons nog ontbreekt zijn expliciete formules voor de kracht F en de versnelling a . Deze hangen uiteraard volledig af van de situatie. Op de volgende pagina zien we opnieuw enkele nostalgische schoolvoorbeelden.

- Een massa m onderhevig aan de zwaartekracht op Aarde:

$$F_g = mg.$$

- Een veer die wordt uitgerekt (of ingedrukt) over een afstand x :

$$F_{\text{veer}} = kx.$$

- De zwaartekracht tussen twee massa's M_1, M_2 op een afstand r van elkaar:

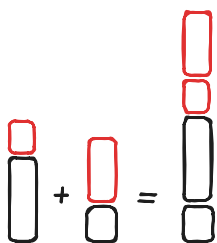
$$F_G = G \frac{M_1 M_2}{r^2}.$$

- De Coulombkracht tussen twee ladingen Q_1, Q_2 op een afstand r van elkaar:

$$F_{\text{elek}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

We laten de eventuele gelijkenissen of toevalligheden opnieuw nog even links liggen en kijken eerst eens naar die andere factor in de tweede wet, de versnelling. Op school krijg je de volgende 'definities' aangeleerd:

- Positie x : de plaats waar een object zich bevindt.
- Snelheid v : de verandering in positie.
- Versnelling a : de verandering in snelheid.
- ...



Figuur 1.2: De verandering van een som.

De oude Grieken gebruikten beweging als een algemeen concept, maar de ‘juiste’ keuze uit bovenstaande lijst was voor hen niet mogelijk. Voor Newton was deze onduidelijkheid echter de geschikte reden om een van de grootste revoluties in de wiskunde te ontketenen. Hij introduceerde de *calculus* (of analyse in het Nederlands). In deze theorie staat het concept van verandering centraal. Het wordt vertegenwoordigd door een nieuwe wiskundige operatie: de **afgeleide**. Hier verkiezen we een algebraïsche aanpak met enkele basisprincipes. De afgeleide beeldt een functie $f(x)$ af op een functie $\frac{df}{dx}(x)$ of kortweg $f'(x)$ als we weten welke letter de veranderlijke heeft. De voorwaarden voor deze operatie zijn de volgende:

- Lineariteit:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x).$$

De verandering van de som van twee functies is de som van de veranderingen zoals hiernaast grafisch weergegeven.

- Leibnizregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x).$$

De Leibnizregel¹ stelt dat om de afgeleide van het product van twee func-



Figuur 1.3: De verandering van een product.

¹Leibniz was de grote tegenhanger van Newton op het Europese vasteland en mede-

ties te berekenen, je de individuele afgeleiden moeten berekenen en ze dan moet herschalen met de andere functie. Een goed voorbeeld is de oppervlakte van een rechthoek zoals in de figuur onder voorgaande pagina afgebeeld. Als je zowel de breedte als de hoogte wat wijzigt, dan zegt de Leibnizregel dat de verandering in oppervlakte gegeven wordt door de twee (grote) rode balken. Maar wat dan met dat kleine blokje in de bovenhoek? Wel, we kijken voor afgeleiden eigenlijk naar heel kleine verandering en het product van een (heel) klein getal met een ander (heel) klein getal is wel echt heel klein, dus dat kunnen we verwaarlozen.

- Normalizatie:

$$\frac{dx}{dx} = 1.$$

Deze eigenschap komt eigenlijk neer op een keuze van eenheden (een ijking als je graag denkt in termen van assenstelsels). We willen dat de afgeleide uitgedrukt wordt op dezelfde schaal als de functies zelf. De verandering in x als we x met één eenheid veranderen kan dus maar beter 1 zijn! Meetkundig komt dit neer op het feit dat de functie $f(x) = x$ een rechte voorstelt onder een hoek van 45° . Je stijgt even veel als je opzij gaat.

In veel cursussen en handboeken wordt de afgeleide gedefinieerd aan de hand van *limieten* om in te spelen op de intuïtie van ‘verandering’. Dit zorgt er echter voor dat veel bewijzen en formules nodeloos complex lijken. Dat is echter niet nodig. De drie eigenschappen die we hierboven hebben ingevoerd zijn equivalent aan de gebruikelijke definitie. Laten we ze dus even in de praktijk omzetten en wat kleine rekenoefeningen maken. Als eerste berekenen we de afgeleide van een constante, een reëel getal dus. Voor ons gemak nemen we het getal 1.

$$\frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(1 \cdot 1) \stackrel{\text{Leibniz}}{=} \frac{d}{d}(1) + \frac{d}{dx}(1)$$

grondlegger van de calculus. Beiden hebben onafhankelijk belangrijke bijdragen aan de wiskunde geleverd.

Maar dit betekent dus dat het getal dat we zoeken, het linkerlid $\frac{d1}{dx}$, gelijk is aan twee keer zichzelf. Het enige getal dat hieraan voldoet is nul:

$$\frac{d}{dx}(1) = 0.$$

Dit resultaat is uiteraard niet geheel onverwacht. Een constante functie is, zoals de naam zegt, constant. Hij hoort dus niet te veranderen! Als tweede oefening beschouwen we een veelterm x^k :

$$\frac{dx^k}{dx} \stackrel{\text{Leibniz}}{=} \frac{dx}{dx}x^{k-1} + x\frac{dx}{dx}x^{k-2} + \dots = kx^{k-1}.$$

Veel meer zullen we doorheen dit boek eigenlijk niet nodig hebben. Wat een geluk hebben we toch alweer dat het universum er schijnbaar altijd voor kiest om alles simpel te houden. Voor de volledigheid geven we nog mee dat een functie **glad** genoemd wordt als we afgeleiden kunnen blijven nemen. Dit betekent dus eigenlijk dat als je de grafiek tekent, hij er glad uitziet. Er zijn geen plotse sprongen of richtingsveranderingen. De verzameling van deze gladde functies wordt vaak genoteerd met $C^\infty(\mathbb{R})$. (Kwestie van alles er wat spannender te laten uitzien.)

	Energie	Kracht
G	mgh	mg
veer	$\frac{1}{2}kx^2$	kx

Tabel 1.1: Kracht en energie.

Nu we over deze kennis beschikken — die tegenwoordig volkomen standaard was, maar in de 17^e eeuw zeer diepe inzichten vereiste — zijn we finaal in staat om de gelijknissen tussen de formules voor kracht en energie te bespreken. We focussen voor het gemak op de zwaartekracht en veerkracht. Vooraleer je verder leest, probeer zelf eens te kijken of je het verband kan vinden aan

de hand van de rekenregels (en voorbeelden) van afgeleiden. « *Voeg hier wat denkwerk in.* » Uit die rekenregels volgt dat bovenstaande uitdrukkingen voor de kracht exact de afgeleiden zijn van die voor energie. Krachten waarvoor dit het geval is worden ook wel **conservatief** genoemd en doorheen dit boek zullen we ons uitsluitend tot dergelijke krachten beperken. De (potentiële) energie die aanleiding geeft tot een kracht wordt op zijn

beurt ook wel de geassocieerde **potentiaal** U genoemd:

$$F(x) = \frac{dU}{dx}(x).$$

Dat de term potentiaal ook gebruikt wordt in de elektriciteit is nu ook geen toeval meer. Dezelfde uitdrukking voor de kracht geeft in dat geval immers het elektrisch veld en het elektrisch veld is hetgeen de kracht op een geladen deeltje bepaalt.

Uitgerust met de kennis over hoe de zwaartekracht aan het aardoppervlak en de veerkracht kunnen afgeleid worden (prachtige woordkeuze) uit hun geassocieerde potentialen, kunnen we ook eens kijken naar die twee andere krachten uit ons lijstje: de 'echte' zwaartekrachtwet en de Coulombkracht. Hiervoor moeten we echter afgeleiden kunnen berekenen van functies van de vorm

$$f(x) = \frac{1}{x^k}.$$

Vooraleer je verder leest, probeer net zoals hierboven eerst eens zelf te bedenken hoe je dit kan doen aan de hand van de gekende rekenregels. « Voeg hier nog wat meer denkwerk in. » Het geluk lacht ons alweer toe want we kunnen eigenlijk dezelfde rekenregels als voor veeltermen blijven gebruiken:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^k} \right) = -\frac{k}{x^{k+1}} = -kx^{-k-1}.$$

Het bewijs hiervan is trouwens vrij simpel en vergt enkel het gebruik van de Leibnizregel:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx} \left(x^k \cdot \frac{1}{x^k} \right) = \frac{dx^k}{dx} \cdot \frac{1}{x^k} + x^k \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^k} \right) \\ &= \frac{kx^{k-1}}{x^k} + x^k \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^k} \right). \end{aligned}$$

Wat herschikken geeft dan

$$x^k \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^k} \right) = -\frac{k}{x}.$$

Aangezien dit moet gelden voor alle waarden van x ($\neq 0$), krijgen we het gevraagde resultaat. In het geval van de zwaartekracht en Coulombkracht zoeken we dus een functie $U(x)$ zodat

$$\frac{dU}{dx}(x) = \frac{1}{r^2}.$$

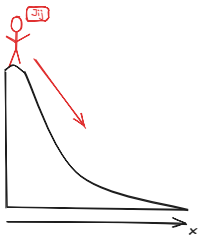
Welke zou dit kunnen zijn? Als je spontaan

$$U(x) = -\frac{1}{r}$$

dacht, gefeliciteerd! Jij bent klaar om een fysicus te worden. Rekenen met afgeleiden gaat je goed af. Toch is dit eigenlijk niet volledig correct. Herinner je je nog het voorbeeldje waarin we aangetoond hebben dat de afgeleide van een constante 0 is? Dit betekent dus dat het meest algemene antwoord op onze vraag eigenlijk

$$U(x) = -\frac{1}{r} + c^{\text{te}}$$

is. Dat is die venijnige constante waar je op wiskundetoetsen misschien wel eens een punt voor verloor. Het gevolg van deze opmerking is dat de exacte waarde van de energie in de fysica eigenlijk geen betekenis heeft. Het zijn de energiever verschillen die ertoe doen!



Figuur 1.4: Bewegen op een helling.

Bovendien hebben we nog een ander fysisch detail over het hoofd gezien. Denk terug aan wat de afgeleide betekent en hoe het gerelateerd is aan de notie van verandering. Als je een klein beetje in de x -richting opschuift, zegt de afgeleide hoeveel $f(x)$ zal veranderen. Wel, stel je nu voor dat je bovenaan een helling staat. Volgens de formule voor de potentiële zwaartekrachtenergie (wat een woord) hangt de energie mooi lineair af van de hoogte van de helling. Moest je een grafiek van $E_g(x)$ tekenen, dan zou die (op een herschaling na) eruit zien als de helling waar je op staat. Maar hier knelt nu net het schoentje. De kracht werkt heel duidelijk in de afhellende

richting. Je zal immers nooit spontaan de heuvel oprollen. Bereken je echter de afgeleide van de grafiek in de figuur onderaan de voorgaande pagina, dan zal je merken dat die langsheen de helling altijd negatief is, want de helling daalt in de x -richting. De kracht in de x -richting zou volgens onze formule

$$F(x) = \frac{dE_g}{dx}(x)$$

dus negatief zijn en naar links wijzen! De grootte van onze kracht zit goed, maar we missen een minteken. De finale, correcte formule voor conservatieve krachten is de volgende:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}.$$

De denkoefening die we daarjuist gemaakt hebben, het vinden van de energie gegeven de kracht, is eigenlijk het omgekeerde van 'differentiaalrekening' (rekenen met afgeleide). Dat deze omgekeerde operatie heel belangrijk zou zijn, wisten ook Newton en Leibniz. Dus terwijl ze toch reeds bezig waren met hun revolutie, hebben ze de 'integraalrekening' er ook maar bijgenomen. Die *integralen* laten ons niet enkel toe om 'anti-afgeleiden' te berekenen, ze stellen ons ook in staat om bijvoorbeeld oppervlaktes en volumes te berekenen. (Want ja, moest je er nog niet bij stilgestaan hebben, de oppervlakte van bijvoorbeeld een bol is de afgeleide van zijn volume.) Eigenlijk hadden de oude Grieken hier ook reeds technieken voor die neerkomen op wat wij nu integralen noemen, maar zij wisten die regels neer te pennen door enkel gebruik te maken van hun verbeelding en intuïtie. Denkers *avant la lettre*!

Nu we toch bezig zijn, laat ons, zonder echt de volledige gereedschapskist van integralen boven te halen, hier nog een oefening op maken. Eentje die sommige lezers ook zal doen terugdenken aan de tijd achter de schoolbanken: de eenparig veranderlijke beweging (EVB). Dit is de beweging

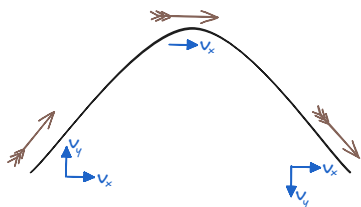
van een object met constante versnelling:

$$\frac{da}{dt} = 0.$$

Let wel op, hier leiden we af naar de tijd en niet meer naar een ruimtelijke coördinaat. Met alles wat we tot nu toe gezien hebben kunnen we eenvoudig de volgende formule aantonen voor de EVB (nog een oefeningetje voor de lezer):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

waar x_0 de beginpositie is en v_0 de beginsnelheid. De positie in functie van de tijd wordt dus beschreven door een parabool. Dit fenomeen is al van in de oudheid gekend, bijvoorbeeld in de ballistiek. Pijlen en kanonskogels volgen paraboolbanen. De enige kracht die op hen inwerkt eenmaal ze afgevuurd zijn is de zwaartekracht en deze is bij benadering constant (de factor g uit de formule $F_g = mg$). In de y -richting wordt de baan van de projectielen dus beschreven door een EVB, terwijl we in de x -richting een rechte krijgen. Er werkt namelijk geen kracht op hen in in de x -richting en de eerste wet van Newton zegt dus dat v_x constant is.



Figuur 1.5: Parabolen en ballistiek.

Zonder de wiskundige revolutie van de *calculus* hadden deze voor ons eenvoudige wetmatigheden misschien wel nooit meer geweest dan dat, wetmatigheden. Laten we het succesverhaal van Newton dus afsluiten met zijn zwaartekracht nog eens in detail te bestuderen. Eerder zagen we we twee formules die gezegd beiden de zwaartekracht zouden moeten beschrijven:

$$F_G(r) = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad \text{en} \quad F_g = mg.$$

Op het eerste zicht kunnen deze nooit compatibel zijn. De ene bevat twee massa's en bevat de afstand (in het kwadraat) in de noemer, terwijl de

andere slechts één massa bevat en niet eens een functie is van de afstand. Toch zijn ze relatief eenvoudig met elkaar te verbinden. Als eerste hakken we de knoop definitief door. De eerste formule is de echte universele zwaartekrachtwet van Newton:

$$F_G(r) = G \frac{M_1 M_2}{r^2}.$$

Om de benaderende kracht F_g te bekomen, moeten we slechts één ding doen:

$$g := \frac{GM_{\text{Aarde}}}{R_{\text{Aarde}}^2}.$$

Voor één keer zullen we getallen invullen en deze formule uitrekenen. Bij benadering worden de massa en straal van de Aarde gegeven door $M_{\text{Aarde}} = 5,97 \times 10^{24}$ kg en $R_{\text{Aarde}} = 6371$ km. De universele zwaartekrachtconstante G is ongeveer gelijk aan $6,67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s². Alles samen geeft dit 9,81 m/s². Als dit getal jou niks meer zegt, foei! Als er nu één getal is dat ze er tijdens de schooluren normaal proberen in te drammen, dan is het wel de valversnelling. Echter, zoals de hulptabellen tijdens toetsen vaak duidelijk maakten, is die valversnelling helemaal geen constante. Ze hangt af van de straal en de massa van het hemellichaam waar je je op bevindt. Bovendien verandert ze zelfs als je op Aarde rondreist. Aan de polen is de afstand tot het middelpunt van de Aarde nu eenmaal kleiner dan aan de evenaar omdat de Aarde rond zijn as draait en niet volledig rigide is. De Aarde wordt een beetje uitgerokken langs de evenaar en vormt een afgeplatte bol, een zogenaamde *oblate sferoïde*.

Iets lastiger is het relateren van de potentialen

$$U_G(r) = -G \frac{M_{\text{Aarde}} m}{r} \quad \text{en} \quad U_g(h) = mgh.$$

Ook hier zouden we moeten kunnen vinden dat U_g een benadering is van U_G . Zoals reeds vermeld zijn het de energiever verschillen die echt een rol spelen in de fysica. Laten we dus eens het verschil berekenen tussen de

zwaartekrachtspotentialiaal U_G aan het aardoppervlak en op een hoogte h erboven. Of, met andere woorden, op afstand R en $R+h$ van het middelpunt van de Aarde:

$$\begin{aligned} U_G(R+h) - U_G(R) &= -G \frac{M_{\text{Aarde}} m}{R+h} + G \frac{M_{\text{Aarde}} m}{R} \\ &= GM_{\text{Aarde}} m \frac{(R+h) - R}{R(R+h)} = GM_{\text{Aarde}} m \frac{h}{R(R+h)}. \end{aligned}$$

De aardstraal R is veel groter dan de hoogte h en we kunnen dus bij benadering stellen dat $R(R+h) \approx R^2$:

$$U_G(R+h) - U_G(R) \approx \frac{GM_{\text{Aarde}}}{R^2} mh = mgh.$$

De zwaartekracht en bijhorende potentiële energie die je op school aan geleerd krijgt is dus wel degelijk correct binnen de gepaste benadering en zijn het gevolg van Newton zijn universele zwaartekrachtwet. Wat was hij toch een genie daar hoog bovenop de schouders der giganten.²

Als laatste gaan we even de wat meer filosofische of metafysische kant op. Waarom komen er toch zo veel afgeleiden voor in de (theoretische) fysica? Bijna elke vergelijking bevat er minstens één en zoals we zullen zien in de volgende hoofdstukken is dit niet enkel zo in de klassieke mechanica. Wel, de reden hiervoor is vrij eenvoudig. Zonder verandering of verschillen is er eigenlijk geen fysica. De oude volkeren geraakten geïnteresseerd in de natuurkunde net omdat ze bepaalde fenomenen wouden verklaren die beweging of verandering bevatten. Bovendien zouden we zelfs kunnen zeggen dat het universum *an sich* enkel steek houdt vanuit het perspectief van een waarnemer omdat er verschillen (en dus afgeleiden) te bepalen vallen. Stel je voor dat je ergens in het midden van een vlakke staat met nergens om je heen iets te zien, zelfs niet aan de horizon of aan de hemel. Als alles er hetzelfde uitziet, kan je je onmogelijk oriënteren. Of laten we nog wat verder gaan en ook de Aarde wegdenken. Je zweeft ergens in de ruimte zonder vaste grond onder je voeten. Nu

²Dit is een subtiele verwijzing naar Newton zijn uitspraak "If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants."

kan je zelfs het verschil niet zeggen tussen boven en onder, er is helemaal niks meer. Of toch bijna, jij bent er immers nog. Je zou dus nog vragen kunnen stellen over je eigen lichaam, waarom het toch best wel koud is in de ruimte, waarom je bloed door je aderen loopt, etc. Absolute uniformiteit zou dus eigenlijk met een volledig lege ruimte overeenkomen. Hier is zelfs geen plaats voor een waarnemer en er zou ook niks gebeuren. Er zijn geen krachten, geen interacties, niets! Dit idee komt in grote lijnen overeen met het [principe van Mach](#), dat onder andere Einstein gestuurd heeft in zijn uitwerking van de algemene relativiteitstheorie. We kunnen enkel en alleen een coördinatenstelsel definiëren relatief ten opzichte van een ruimere 'omgeving' (wat dat ook mag zijn). Indien er geen verschillen in tijd of ruimte zouden bestaan, is er geen referentiepunt waartegenover we ons kunnen oriënteren.

Extra's

Voor de uiterst geïnteresseerde lezer zal elk hoofdstuk nog wat extra's bevatten. Dit zullen wat technischere of diepgaandere onderwerpen of toepassingen bij het hoofdstuk zijn. Voor dit hoofdstuk zullen we het bij een uitweiding over de afgeleiden houden. Een soort *sneak peek* voor volgend hoofdstuk. Dit zal echter een belangrijke extra eigenschap van afgeleiden vergen die we nog niet besproken hebben: de [kettingregel](#) voor samengestelde functies. Deze leest als volgt:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df}{dg}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x).$$

Je neemt dus de afgeleide van de buitenste functie f , ingevuld in het punt $g(x)$, en vermenigvuldigt deze met de afgeleide van de binnenste functie. Intuïtief kan je de formule als volgt begrijpen. Normaal gezien is de afgeleide de verandering van de formule als je zijn argument een heel klein beetje wijzigt. Maar voor f wijzig je eigenlijk niet x , je wijzigt $g(x)$. Vandaar de tweede term, die exact corrigeert voor deze wijziging. Om de formule te bewijzen zullen we voor één keer wel gebruikmaken van de

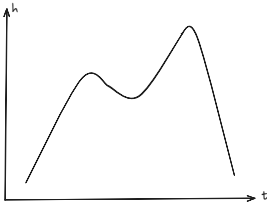
limietdefinitie

$$\frac{df}{dx}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Het bewijs gaat als volgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{df}{dg}(g(x)) \frac{dg}{dx}(x). \end{aligned}$$

Het enige geval waar dit bewijs zou falen is waar $g(x)$ constant is rond x . Maar in dat geval zal ook $f(g(x))$ constant zijn rond x en zijn zowel het linker- als het rechterlid nul. *Ergo*, de kettingregel geldt. \square



Figuur 1.6: Hoogteprofiel.

Maar waar is dit nu eigenlijk nuttig? Wel, stel dat we de beweging van een object doorheen de ruimte volgen, zoals jouw gps wanneer je gaat wandelen. In dit geval hebben we een functie van de tijd naar de positie. Als we nu bijvoorbeeld aan de gps vragen wat de hoogte is langsheen jouw pad, dan krijgen we een functie van de tijd naar de hoogte. We kunnen dan ook kijken hoe deze hoogte verandert doorheen de tijd. Dit

betekent dat we naar

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx} \frac{dx}{dt}$$

kijken. We hebben dus de kettingregel nodig om de ‘totale tijdsafgeleide’ te berekenen aan de hand van jouw pad $x(t)$ en het hoogteprofiel $h(x)$. Laten we het zelfs wat realistischer maken en ook toelaten dat je in de y -richting wandelt. In dit geval is de formule iets complexer, want h wordt een functie van twee argumenten: x en y . Bovendien zullen beide argumenten ook een functie zijn van de tijd (tenzij je halsstarrig rechtdoor blijft

lopen, ongeacht de obstakels op jouw pad). De totale afgeleide zal dus beide veranderingen in rekening moeten brengen (dit keert terug in het volgende hoofdstuk):

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Om het verschil te maken tussen een ‘totale’ afgeleide en een afgeleide naar een van de argumenten zullen deze laatste aangeduid worden met kromme d’s. Dergelijke afgeleiden worden ook wel **partiële afgeleiden** genoemd. Het zijn eigenlijk de afgeleiden waarbij je maar een van de argumenten wijzigt en de anderen constant houdt.

Afgeleiden zijn ook heel nuttig omdat ze een soort benadering geven voor ingewikkelde (gladde) functies. Het zijn eigenlijk eerste-orde benaderingen om de volgende reden (dit staat gekend als het *lemma van Hadamard*). In de buurt van een punt a kan elke gladde functie f als volgt geschreven worden:

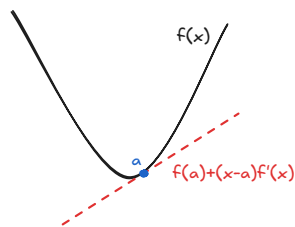
$$f(x) = f(a) + (x - a)g(x).$$

Dit lijkt trouwens heel goed op de Euclidische deling (of ‘staartdeling’) van veeltermen. Voor elke veelterm p en getal a bestaat er een veelterm q zodat

$$p(x) - p(a) = (x - a)q(x).$$

In de uitdrukking van het lemma van Hadamard is g opnieuw een gladde functie. Door van beide leden de afgeleide te nemen, kan je ook zien dat $\frac{df}{dx}(a) = g(a)$. Je kan dit resultaat zelfs blijven herhalen met als gevolg dat je f kan schrijven als een (oneindige) veelterm:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - a)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(a).$$



Figuur 1.7: Raaklijn aan een functie.

Dit soort *reeksen* worden ook wel **Taylorreeksen** genoemd. Ze laten ons toe om complexe formules soms eenvoudiger uit te rekenen of te benaderen tot op een gewenste nauwkeurigheid (een van de belangrijkste vaardigheden van een fysicus). In het geval dat $x \approx a$ zijn de hogere machten $(x - a)^n$ bijna nul en kunnen we ze verwaarlozen. In dat geval krijgen we $f(x) \approx f(a) + (x - a)\frac{df}{dx}(a)$. Lokaal kunnen we een functie dus benaderen door een rechte met de afgeleide als richtingscoëfficiënt! Een typisch voorbeeld hiervan is de **exponentiële functie**. Deze functie heeft een heleboel equivalente definities, maar de meest gangbare is in termen van zijn afgeleide:

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x) \quad \text{en} \quad \exp(0) = 1.$$

De verandering van de exponentiële functie is in elk punt even groot als de functie zelf, een verband dat in de natuur op meer dan een plaats voorkomt. Denk bijvoorbeeld aan de reproductie van bacteriën of de kettingreactie in kernreactoren. Als we dit verband nu invullen in de bovenstaande reeksontwikkeling voor gladde functies, bekommen we

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Het speciale aan deze reeks is dat hij overal geldig is, niet enkel in de buurt van $x = 0$. Dergelijke functies worden soms ook wel **analytisch** genoemd. Ze zijn de meest gebruiksvriendelijke functies die we in de calculus kunnen tegenkomen en in de praktijk zijn ze ook de enige functies die we tegenkomen (onder meer omdat fysici graag aannemen dat alle functies analytisch zijn.)

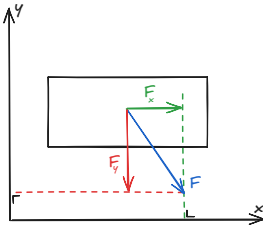
Hoofdstuk 2

Vertalen met Lagrange, Hamilton & Poisson

Met het aanbreken van het tweede hoofdstuk wordt het hoog tijd om de schoolbanken te verlaten en plaats te nemen in de universiteitsaula's. In dit hoofdstuk zullen we drie doelstellingen voor ogen hebben:

1. Een uitbreiding naar drie dimensies (of meer) zoeken.
2. Een eerste uitnodiging voor de meetkunde.
3. Een vervanging voor Newton vinden.

Dat laatste moeten we natuurlijk niet te letterlijk nemen. Wat hij zei blijft overeind staan, we zullen enkel zijn formules herschrijven op een manier die ons toelaat om de onderliggende structuur eenvoudiger (en eleganter) te analyseren. Op het eerste gezicht, zeker vanuit een praktisch standpunt, lijkt Newton's tweede wet misschien eenvoudig en nuttig, maar vanuit theoretisch standpunt is dit eigenlijk niet zo en verbergt ze heel wat schoonheid van de klassieke mechanica. Om dit te kaderen moeten we echter eerst de twee andere puntjes afoetsen.



Figuur 2.1: Ontbinden van een kracht in componenten.

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2} .$$

De kracht in een gegeven richting heeft enkel en alleen een invloed op de versnelling in die richting en in loodrecht daarop staande richtingen. Door je assen slim te kiezen kan je dus vaak een probleem vereenvoudigen. (Leg een van de assen bijvoorbeeld langsheen de kracht.)

Toch is het vrij vervelend om elke keer alle drie die vergelijkingen te moeten opschrijven, zeker omdat ze nagenoeg identiek zijn. Stel je voor dat je in 26 dimensies zou werken zoals onze goede vrienden van de snaartheorie. We gaan dus eerst onze notatie wat aanpassen. Voornamelijk omdat wiskundigen graag nieuwe notaties invoeren, kwestie van alles spannend te houden, maar ook omdat het een belangrijk concept introduceert. Hier doen de **vectoren** hun intrede. Krachten worden vaak als een pijl getekend (met een 'grootte' en 'zin'¹), wat zeker bij het ontbinden in componenten van pas komt, waarbij een assenstelsel gekozen wordt waarvan de oorsprong samenvalt met het aangrijpingspunt van de pijl. De componenten van de kracht (ten opzichte van het gekozen assenstelsel) zijn dan de loodrechte



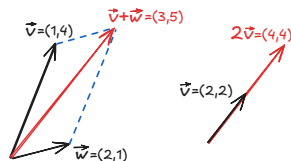
Figuur 2.2: Ontbinden van een vector in twee (Cartesiaanse) assenstelsels.

¹O wee als je hier het woord richting gebruikte op een toets fysica. De richting stelt de lijn waarop de vector ligt voor, de zin stelt de oriëntatie langsheen de lijn voor.

projecties van de pijl op de assen. Zie Figuur 2.2 op vorige pagina voor twee voorbeelden.

Uiteraard is het enkel de volledige pijl die fysisch van belang is, onze keuze van assenstelsel is louter een truc om ons het leven makkelijker te maken. We moeten ze dus algemener kunnen definiëren, zonder te verwijzen naar coördinaten. Deze objecten, de vectoren, worden gekenmerkt door de volgende basis-eigenschappen:

- Optelling: Als \vec{v} en \vec{w} twee vectoren zijn, dan is $\vec{v} + \vec{w}$ ook een vector.
- (Scalaire) vermenigvuldiging: Als \vec{v} een vector, dan is $\lambda\vec{v}$ een vector voor elke reëel getal $\lambda \in \mathbb{R}$.



Figuur 2.3: Optellen en scalaire vermenigvuldigen.

Als we de vectoren voorstellen door componenten zoals in de figuur hierboven (hier komen we in Hoofdstuk 3 nog op terug), dan komt de optelling van twee vectoren neer op het paarsgewijs optellen van de componenten. Let wel op, ook al komen de x - en y -coördinaten van vectoren in het vlak toevallig overeen met de componenten van de vectoren, in het algemeen zijn dit twee totaal verschillende concepten! Zo zijn de poolcoördinaten r en θ geen componenten van een vector, maar wel coördinaten in het vlak! Vectoren zijn trouwens niet enkel nuttig in de wiskunde en fysica. Moderne computers maken gretig gebruik van het lineaire karakter van vectoren. De GPU's (*graphics processing units*) die voor *gaming* en *machine learning* niet meer weg te denken zijn, zijn zo interessant net omdat ze de optelling voor vectoren niet component per component uitvoeren. Deze processoren tellen alle componenten in parallel op.

In de abstracte wiskunde zeggen we dat al die vectoren samen een **vectorruimte** vormen. Dat is de algebraïsche structuur die de optelling en scalaire vermenigvuldiging herbergt. Herinner je je nog de voorwaarden voor afgeleiden? Een hiervan zei dat afgeleiden lineair zijn. Dit betekent

dus dat ze de vectorstructuur op $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ bewaren, want ja hoor, (gladde) functies vormen een vectorruimte. Alleen leven deze in oneindig veel dimensies en niet in twee of drie dimensies, maar in laten we nog niet te ver van het pad afdwalen. Neem eerst eens de kracht- en snelheidsvectoren

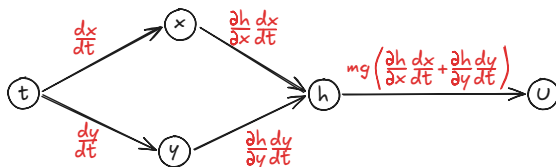
$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad \text{en} \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z).$$

Samen met de inhoud van vorig hoofdstuk gaan we deze vectoren nu aan het werk zetten. (De lezers van de extra's sectie zullen hier een kleine voorsprong hebben.) We gaan opnieuw op wandel doorheen de Vlaamse Ardennen en berekenen de tijdsafgeleide van onze potentiële energie langsheen onze route γ (Het minteken uit de definitie van conservatieve krachten valt hier weg omdat het hier gaat over de kracht die jij uitoefent, dus tegengesteld aan de zwaartekracht):

$$\begin{aligned} \frac{dU_g}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(mgh(\gamma(t))) = mg \frac{d(h \circ \gamma)}{dt}(t) = mg \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \\ &= F_x v_x + F_y v_y. \end{aligned}$$

Voor de nieuwkomers, die 'kromme' afgeleiden ∂ zijn de partiële afgeleiden. Dit zijn afgeleiden die maar naar de verandering in één richting kijken. Omdat de 'kettingregel' van essentieel belang is, zullen we deze hier toch nog even bespreken en niet voorbehouden laten voor de lezers van de extra's. In de laatste stap van de eerste lijn gebeurt schijnbaar iets speciaals. De tijdsafgeleide wordt niet enkel uit elkaar getrokken in een term per ruimtelijke coördinaat, er komt ook nog eens een ruimtelijke afgeleide bij. De reden hiervoor is dat de hoogte waarop we ons bevinden afhangt van onze x - en y -coördinaten en het zijn deze laatste die op hun beurt weer afhangen van de tijd. We moeten dus eigenlijk de veranderingen propageren, eerst van t naar x en y , en dan van x en y naar h en uiteindelijk U_g . Hieronder staat dit diagrammatisch weergegeven.

We vertrekken (links) van de tijd t om twee functies te berekenen, de x - en y -coördinaat, waarbij we een eerste afgeleide verkrijgen. Aan de hand van de coördinaten kunnen we de hoogte berekenen. Hierbij nemen we de bestaande veranderingen, de snelheden v_x en v_y , en vermenigvuldigen met



Figuur 2.4: De kettingregel voor afgeleiden.

de partiële afgeleiden van h . Aangezien de coördinaten samenkomen in h , moeten we de twee bijdragen optellen. Als laatste gaan we van de hoogte h naar de potentiële energie U_g en de afgeleide hiervan is de constante mg . Een dergelijk schema is zeker niet gebruikelijk in de fysica, maar in de *machine learning* zijn ze standaard. Neurale netwerken werken exact op deze manier. De 'connecties' afleiden, bijdragen langsheen een pad vermenigvuldigen en alles optellen wanneer de paden ergens samenkomen.

De kettingregel leert ons dus dat de verandering van de energie die wij leveren doorheen de tijd, het zogeheten **vermogen**, gegeven wordt door een som van de vorm²

$$P := F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z.$$

Dit is een soort product van kracht en snelheid, eentje waarbij we paarsgewijs de componenten van de vector vermenigvuldigen en dan alles optellen. Met vectoren kunnen we dit nu eigenlijk heel mooi noteren als

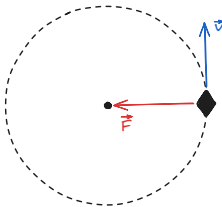
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Hier hebben we een product van vectoren in het leven geroepen: het **inproduct**. Op deze manier hoeven we ons niks aan te trekken van het aantal dimensies of van het gekozen assenstelsel. Het inproduct is een goed gedefinieerde, meetkundige grootte. Dit in tegenstelling tot de coördinatenuitdrukking $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + \dots$ die enkel geldig is voor

²De P van het Engelse *power*. Let wel op, dit is de hoofdletter P ! De kleine p wordt gebruikt voor druk als het een gewoon getal is en voor impuls als het een vector (of een component van een vector) is. (Kwestie van eenduidige notaties te gebruiken.)

Cartesiaanse assenstelsels (loodrechte stand en gelijke ijking). Voor algemene assenstelsels zoals pool- of bolcoördinaten moeten extra factoren worden geïntroduceerd. Gelukkig zullen we dergelijke exotische gevallen nergens expliciet tegenkomen. (Dat de keuze van het assenstelsel echt niet uitmaakt, is een leuke oefening voor de lezer. « *Hint hint.* ») Via het inproduct kunnen we nu ook bijvoorbeeld de kinetische energie beknopter neerpennen (in de fysica wordt T meer gebruikt dan E_{kin}):

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}.$$



Figuur 2.5: Een object rondslingeren.

Het inproduct laat ons trouwens niet enkel toe formules te verkorten, het heeft nog een heel belangrijke eigenschap. Wanneer twee vectoren loodrecht op elkaar staan, dan is hun inproduct exact nul (en vice versa). Het bewijs hiervoor is intuïtief. Kies een (loodrecht) assenstelsel waarbij de ene as langs de ene vector ligt en de andere as langs de andere vector. De uitdrukking voor het inproduct wordt dan

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 0 + 0 w_2 + 0 \cdot 0 + \dots = 0.$$

Indien we dus een kracht uitoefenen die loodrecht op de bewegingsrichting staat, dan is ons vermogen eigenlijk nul. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer je jouw rugzak zoals een slinger zou rondzwaaien. De kracht die je uitoefent om de rugzak vast te houden staat loodrecht op zijn bewegingsrichting. De kracht is zelf niet nul, maar het vermogen wel!

Met onze nieuwe kennis kunnen we nu eindelijk terugkeren naar de tweede wet van Newton. De vectoren stellen ons in staat deze wet in één formule te schrijven, ongeacht het aantal dimensies:

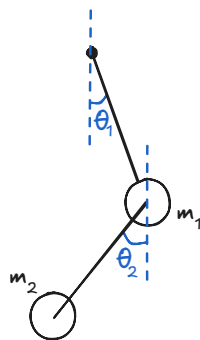
$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}.$$

Voor conservatieve krachten wordt dit op zijn beurt

$$-\vec{\nabla}V = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2},$$

waar we toch nog een extra stukje notatie ingevoerd hebben (het is toch zo leuk). De vector van partiële afgeleiden $\vec{\nabla}V$, die nu ook volledig vrij is van de keuze van coördinaten, wordt ook wel de **gradiënt** genoemd en is een uiterst populaire notatie (bij fysici althans). Die coördinaatonafhankelijkheid die we nu al enkele keren aangehaald hebben, een eigenschap die onder meer de basis vormde voor Einstein zijn relativiteitstheorie(ën), is trouwens niet de enige reden om de abstracte noties van vectoren en vectorruimtes in te voeren. In de verdere hoofdstukken zullen vectoren nog op twee manieren opduiken. Enerzijds zullen ze, opnieuw in de gedaante van afgeleiden, benaderingen geven voor meetkundige objecten en anderzijds zal lineariteit ook naar voor komen als de essentiële eigenschap achter de mysterieuze wonderen van de kwantummechanica.

Hierbij hebben we nu ook twee van de drie doelstellingen gehaald. Het derde en laatste puntje zal echter het belangrijkste zijn. Maar wat bedoelen we nu echt met “Newton vervangen”? Waarom zouden we dat überhaupt willen doen? Zoals bij aanvang van het hoofdstuk vermeld werkt de tweede wet heel goed en vormt hij, zeker voor numerieke methodes, de basis van allerlei technieken. Toch is de wet niet ideaal voor analytische doeleinden. Ook al kunnen we de wet in vectoriële vorm uitdrukken en hem dus onafhankelijk van coördinaten maken, voor expliciete berekeningen is een expliciete keuze vaak noodzakelijk. Net hier loopt het stroef. Beschouw bijvoorbeeld de dubbele slinger uit de figuur hiernaast. Hierbij is een slinger vastgemaakt aan het middelpunt van een andere slinger, beiden hangend aan een vaste staaf. (Zoek hier maar eens wat video’s van op. Dit systeem is een prachtig voorbeeld van *chaotisch gedrag*. Dergelijk gedrag is uiterst onvoorspel-



Figuur 2.6: De dubbele slinger.

baar en een miniem verschil in de beginvoorwaarden geeft een volledig andere uitkomst op lange termijn.) Indien we hiervoor de vergelijkingen van Newton zouden opschrijven, hebben we vier vergelijkingen nodig aangezien beide slingers beschreven worden door twee coördinaten. Deze vergelijkingen zijn dan ook nog eens sterk gekoppeld want de slingers zijn met elkaar verbonden. Toch zouden twee coördinaten echter volstaan, bijvoorbeeld de twee hoeken θ_1 en θ_2 , aangezien de staven rigide zijn en de afstand tussen de slingers en hun ophangpunt dus constant is. Dergelijke analyses en vereenvoudigingen zijn echter niet mogelijk (of toch heel lastig) als we blijven werken met de tweede wet van Newton. Bovendien is de notie van kracht eigenlijk helemaal niet zo fundamenteel. Zoals we zagen, kunnen conservatieve krachten worden afgeleid van een potentiaal. Energie is dus de veel diepere en meer fundamentele notie. Dit is wat we willen bereiken met onze vertaling, of vertalingen zoals de titel had kunnen doen vermoeden. We zullen drie verwante doch verschillende formuleringen zien, ieder met hun eigen voor- en nadelen.

Vooraleer we hiermee kunnen beginnen, moeten we eerst nog even iets rechtzetten. Er is een kleine leugen in dit boek geslopen. Tot nu toe hebben we de tweede wet als volgt geschreven:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}.$$

Dit is echter niet volledig correct. Beschouw bijvoorbeeld een raket die rondvliegt doorheen de ruimte. Deze verbruikt brandstof om te kunnen blijven vliegen. Moesten we de massa constant houden bij het berekenen van zijn baan zouden we er echter goed naast zitten. Newton wist dit zelf eigenlijk maar al te goed (al dacht hij niet in termen van raketten) en schreef zijn wet als volgt op:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

De grootheid $\vec{p} := m\vec{v}$, het product van de massa en de snelheid, wordt

de **impuls** genoemd.³ Vanaf hier vertrekken we dus van de ‘echte’ tweede wet (voor conservatieve krachten):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}V.$$

Maar als energie nu echt zo belangrijk is, waarom zijn we de kinetische energie dan eigenlijk nog niet tegengekomen in ons verhaal? Kijk eens goed naar de definities van impuls en kinetische energie. De componenten van de impuls zijn afgeleiden van de kinetische energie (naar de snelheid):

$$\frac{\partial T}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = m v_i = p_i.$$

In de tweede wet hebben we dus eigenlijk zowel links als rechts een afgeleide van de energie staan. Weliswaar een andere soort energie en een andere afgeleide, maar toch zijn ze gelijkaardig van vorm:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_i} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

We zijn nu bijna klaar. We hoeven enkel nog op te merken dat de kinetische energie enkel van de snelheid \vec{v} afhangt en de potentiaal enkel van de positie \vec{x} afhangt. We kunnen dus eigenlijk in bovenstaande formule T en V vervangen door $L(\vec{x}, \vec{v}) := T(\vec{v}) - V(\vec{x})$, want de (partiële) afgeleide van een functie naar een coördinaat waar de functie niet van afhangt is nul, het is namelijk een constante vanuit het perspectief van die coördinaat. We krijgen finaal de volgende ultieme formule:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}.$$

Deze vergelijking heet de **Euler-Lagrangevergelijking** en vormt het eerste luik van onze vertaling. De functie $L(\vec{x}, \vec{v})$ heet op zijn beurt de **Lagrangiaan**. Nu kan je je waarschijnlijk de vraag stellen waarom we deze

³Let hierbij op! In het Engels wordt de term *impulse* voor een ander concept in de fysica gebruikt. De correcte Engelse vertaling van impuls is *momentum*. Het woord moment wordt ook in het Nederlands gebruikt, zeker als het bijvoorbeeld over rotaties gaat. Daarbij is het *draaimoment* de tegenhanger van de impuls.

Lagrangiaanse formulering zouden gebruiken, we zijn immers teruggekeerd naar een expliciete coördinatenuitdrukking. Het verschil is echter dat deze vergelijkingen bruikbaar zijn voor eender welke keuze van coördinaten. Als we terugkeren naar het voorbeeld van de dubbele slinger (Figuur 2.6), dan zullen we twee vergelijkingen krijgen, één voor θ_1 en één voor θ_2 . Een slimme fysicus gebruikt enkel die coördinaten die het probleem zo eenvoudig mogelijk maken!

Verder is een van de belangrijkste toepassingen van deze formulering het beschrijven van symmetrieën. Een **symmetrie** is een operatie of transformatie die het fysische systeem onveranderd laat. Bijvoorbeeld, neem een bol en roteer hem om om het even hoeveel graden. De bol zal er hetzelfde blijven uitzien, hij is symmetrisch onder rotaties. In de fysica zijn symmetrieën van essentieel belang. Je zou zelfs kunnen zeggen dat ze *het* centrale concept van de fysica vormen. Ze zijn trouwens niet enkel interessant omdat ze vaak problemen vereenvoudigen, ze komen ook altijd samen met een **behouden grootheid**. Dit is een grootheid, zoals snelheid, massa of energie, die doorheen de tijd constant blijft. De snelheid van een object is bijvoorbeeld een behouden grootheid zolang er (netto) geen kracht op inwerkt, conform de eerste wet van Newton. Om dit resultaat te zien, breiden we het concept impuls wat uit. Gegeven een coördinaat q^i — vanaf nu gebruiken we de letter q voor coördinaten en de gestipte letter \dot{q} voor snelheden om het onderscheid met de Cartesiaanse coördinaten duidelijk te maken — definiëren we de **toegevoegde impuls** p_i als de afgeleide die opduikt in de Euler-Lagrangevergelijkingen:

$$p^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}.$$

We moeten eraan wennen, er zijn (te) veel notaties in omloop. Niet enkel omdat wiskundigen dat zo leuk vinden, maar ook gewoon omdat er zo veel concepten en constructies zijn. Een stipje boven een symbool duidt bijna altijd de (totale) tijdsafgeleide aan.

Het is een mooie oefening om eens aan te tonen dat dit overeenkomt met de gewoonlijk definitie van impuls in het geval van ‘simpele’ systemen in Cartesiaanse coördinaten. Deeltjes in een cirkelbaan zijn nog een

mooi voorbeeld voor deze formulering. In poolcoördinaten is de overeenkomstige toegevoegde impuls nu niet de gewone impuls, maar het **draaimoment** \vec{L} . Om deze grootheid compact te noteren moeten we echter nog een nieuw product met vectoren introduceren. (We zullen dit product later nog tegenkomen.) We hadden reeds het inproduct $\vec{v} \cdot \vec{w}$, dat een getal gaf, en nu definiëren we ook het **uitwendig product**, dat een vector geeft:

$$\vec{v} \times \vec{w} := (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x).$$

Dit product valt echter enkel te definiëren in drie dimensies. Toch is het behoorlijk nuttig! Het draaimoment kan hiermee als volgt gedefinieerd worden:

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p},$$

wat de link legt met de rechterhandregel die je wel eens op school tegenkomt. Je wijst met je duim in de richting van de eerste vector (\vec{r} in dit geval) en met je wijsvinger in de richting van de tweede vector (\vec{p} in dit geval). Als je dan je middelvinger strekt zodat die in de overblijvende richting wijst, dan krijg je exact de richting van het uitwendig product $\vec{r} \times \vec{p}$! De Lorentzkracht voor een geladen deeltje in een magnetisch veld is hier nog een voorbeeld van:

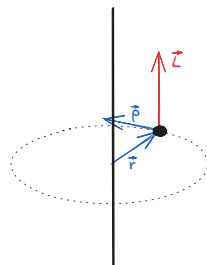
$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} := q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

De rechterhandregel voor het magnetisch veld rond een spoel of stroomdraad komt hiervandaan.

Maar hoe helpt deze langdradige uitweiding ons met die symmetrieën? Wel, wiskundig komt een symmetrie overeen met een coördinaat waar de Lagrangiaan niet van afhangt:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

Als je dit invult in de Euler–Lagrangevergelijking, dan is het rechterlid nul. De vergelijking zegt dan dat de tijdsafgeleide van de toegevoegde



Figuur 2.7: Het draaimoment \vec{L} .

impuls ook nul is of, met andere woorden, de toegevoegde impuls p_i is constant doorheen de tijd. We hebben onze behouden grootheid gevonden! Dit resultaat, dat bijna niet naar waarde te schatten valt, wordt het [theorema van Noether](#) genoemd. Tegenwoordig wordt het ook vaak in de omgekeerde richting gebruikt. Men begint met een aantal symmetrieën en zoekt dan naar alle Lagrangianen (of bewegingsvergelijkingen) die die symmetrieën hebben. Dit is bijvoorbeeld zo bij 'het Standaardmodel van de deeltjesfysica' dat we zullen tegenkomen in Hoofdstuk 5.

Ondanks het belang van de Lagrangiaanse formulering bij de studie van symmetrieën en in moderne theorieën zoals het Standaardmodel, is deze formulering toch niet perfect. Net zoals de tweede van Newton bevatten de Euler–Lagrangevergelijkingen ook tweede-orde afgeleiden. Dergelijke vergelijkingen zijn vaak een stuk moeilijker op te lossen dan hun eerste-orde tegenhangers (zowel analytisch als numeriek). Het is hier dat Hamilton op het toneel verschijnt. Waar Lagrange (en Euler) met posities q^i en snelheden \dot{q}^i werkte, besliste Hamilton om rechtstreeks met posities q^i en impulsen p_i te werken. De eerste stap bestaat er dus uit om de bestaande bewegingsvergelijkingen in termen van q 's en p 's te schrijven. Voor de kinetische energie gebruiken we de klassieke definitie van de impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$. Dit geeft ons

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m}.$$

Net zoals we de impuls konden bekomen als de afgeleide van de kinetische energie naar de snelheid, kunnen we ook de snelheid bekomen als de afgeleide naar de impuls:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial T}{\partial p_i}.$$

Samen met de tweede wet van Newton krijgen we nu wel twee eerste-orde vergelijkingen:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial T}{\partial p_i} \quad \text{en} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Hier kunnen we dezelfde truc als in het vorige stuk gebruiken. De kinetische energie hangt enkel af van de impulsen en de potentiële energie hangt enkel af van de posities. Indien we dus de totale energie $H(q, p) := T(p) + V(q)$ definiëren, ook wel de **Hamiltoniaan** genoemd, bekommen we finaal de **vergelijkingen van Hamilton**:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{en} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Daar dit eerste-orde vergelijkingen zijn en zo eenvoudiger zijn om op te lossen dan de tweede-orde Lagrangiaanse vergelijkingen, vormen ze de basis voor heel wat methodes, in het bijzonder numerieke methodes. Deze formulering is zelfs zo succesvol dat ze tot ver buiten de fysica wordt toegepast. In de statistiek en data-analyse wordt het onder meer gebruikt om een efficiënte weg te vinden doorheen de vaak uiterst hoogdimensionale data. Zo heeft theoretische fysica soms nog wel eens een nut in de wereld van vandaag. In Hoofdstuk 4 zullen we trouwens zien hoe we deze vergelijkingen coördinaatonafhankelijk kunnen neerschrijven om ze zo nog beter te maken.

Dit brengt ons bij het laatste luik van onze vertalingsmissie. Historisch kwam dit eigenlijk voor de herformulering door Hamilton, maar het werk van Poisson — we gaan dus niet over Franse vissen praten — leest natuurlijker indien we van de vergelijkingen van Hamilton vertrekken. Beschouw een algemene (gladde) functie $f(q, p)$ van de coördinaten en impulsen. De kettingregel voor de totale tijdsafgeleide leest als volgt:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \stackrel{\text{Hamilton}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Het is je aan te raden eens goed naar het laatste lid te kijken en de prachtige symmetrie te ontdekken. Op het minteken na is het enige verschil tussen de twee termen het verwisselen van coördinaat en impuls. Toeval of niet? Enkel het universum kan ons dit vertellen. Dit toeval bracht meneer Poisson wel op het lumineuze idee om nog wat nieuwe notatie te

introduceren, het **Poissonhaakje**:

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

De vergelijkingen van Hamilton kunnen hiermee uiterst beknopt worden opgeschreven:

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} \quad \text{en} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}.$$

Tijdsevolutie wordt dus volledig gedreven door de Hamiltoniaan of, met andere woorden, door de totale energie van het systeem, wat op zijn beurt dan weer aanleiding geeft tot het theorema van Noether voor de tijd! In een systeem dat tijdsafhankelijk is, is de totale energie behouden. Let wel op, dit betekent niet dat alles bevroren is in de tijd! Het vereist enkel dat er geen expliciete tijdsafhankelijkheden zijn. De zwaartekracht tussen twee objecten gedraagt zich morgen op dezelfde manier als tien jaar geleden, ook al verandert de exacte waarde wel. De potentiële energie wordt enkel omgezet in kinetische energie, of omgekeerd, maar het totaal blijft behouden!

Bij deze zijn we aangekomen bij het einde van dit hoofdstuk. We hebben de schoolbanken met succes verlaten en hebben ons zelfs door het eerste jaar van de universiteit geworsteld. (Met succes als je het tot hier volgehouden hebt.) Net zoals in vorig hoofdstuk is ook hier nog wat tijd en ruimte vrijgemaakt voor de lezers die niet genoeg kunnen krijgen van al het gekke dat de wiskunde en theoretische fysica te bieden hebben.

Extra's

Als eerste kijken we nog eens naar rotaties. Hiervoor is het vaak handig om over te gaan op bolcoördinaten:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\theta).$$

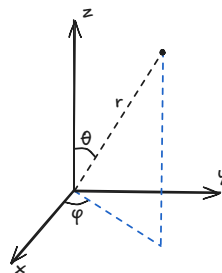
Dit is het paradijs voor mensen die van driehoeksmeetkunde houden. De hoeken φ en θ worden respectievelijk de **azimuth(ale) hoek** en **poolhoek** of **inclinatie** genoemd. Wat leuk rekenwerk geeft volgende uitdrukking voor de snelheid «ja, dit is alweer een oefening»:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta).$$

Zoals we kunnen zien, hangt deze uitdrukking, en bij uitbreiding de kinetische energie, niet expliciet af van de poolhoek φ , enkel van zijn tijdsafgeleide. Als we nu een potentiaal beschouwen die ook niet van de poolhoek afhangt en enkel van de afstand afhangt, zoals de zwaartekracht of Coulombkracht, dan hebben we een symmetrie van de Lagrangiaan gevonden. Met nog meer rekenwerk kan je aantonen dat de bijhorende toegevoegde impuls en dus de bijhorende behouden grootte gegeven worden door

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}r^2 \sin^2(\theta).$$

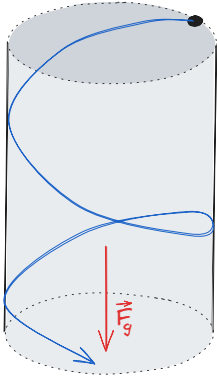
Als we nu bijvoorbeeld de z -as langsheen de rotatieas leggen, dan is $\theta = \pi/2 = 90^\circ$ of dus $\sin(\theta) = 1$. Bovenstaande formule vereenvoudigt in dit geval tot $p_\varphi = m\dot{\varphi}r^2 = mvr$. Als je bovendien de formule $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ voor het draaimoment uit dit hoofdstuk mooi zou uitwerken in componenten, dan zou je vinden dat mvr exact de z -component is. (Dit heeft ook de auteur pijnlijke vingers en hersenen bezorgd. Wees dus gewaarschuwd!) Indien het nog niet duidelijk zou zijn dat symmetrie echt wel belangrijk is in de fysica, kunnen we nog een ander symmetrieargument gebruiken om aan te tonen dat niet enkel de z -component behouden blijft, maar de hele vector \vec{L} . We hadden de z -as in de richting van de rotatieas gelegd, maar eigenlijk was deze keuze arbitrair. Het vereenvoudigt enkel het rekenwerk. Door de berekening te herhalen voor alle drie de assen,



Figuur 2.8: Bolcoördinaten voor een punt in 3D.

vinden we dus dat

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$



Figuur 2.9: Spiraal-
baan van een knikker.

Beschouw bijvoorbeeld de situatie waarbij een knikker aan de binnenkant van een cilinder naar beneden geslingerd wordt zoals in de figuur hiernaast geschetst. Hierbij leggen we een potentiaal aan die de rotatiesymmetrie breekt. De zwaartekracht wijst in dit geval naar beneden aangezien er enkel op Aarde geknikkerd wordt (voor zover we weten) en we hebben dus geen vrije keuze van z -as meer. In een dergelijk systeem is niet het gehele draaimoment behouden:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0.$$

Enkel de component langsheen de rotatie-as, de z -as, is nog behouden. Als we van boven op de cilinder neerkijken dan zal de knikker schijnbaar een cirkelbeweging uitvoeren en deze beweging zal met een constante hoeksnelheid blijven uitgevoerd worden. Vanop de zijkant gezien zal de knikker echter sneller en sneller naar beneden rollen.

Nu we na de lange, ietwat technische uitweiding over Lagrangiaanse mechanica dit onderwerp waarschijnlijk wel beu zijn, is het tijd om over te gaan op de Hamiltoniaanse mechanica. Dit mag je trouwens vrij letterlijk nemen. Bij het afleiden van de vergelijkingen van Hamilton waren we opnieuw vertrokken van de tweede wet van Newton, maar, en misschien had je dit al opgemerkt, je kan de Hamiltoniaan ook als volgt bekomen uit de Lagrangiaan:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L.$$

Een dergelijke transformatie wordt ook wel een **Legendretransformatie** genoemd. Het wisselt snelheden en impulsen om: L is een functie van q en

\dot{q} , terwijl H een functie is van q en p . Vergelijk bovendien ook de definitie van de toegevoegde impuls met de tweede vergelijking van Hamilton:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad \text{en} \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Vanuit het perspectief van de Hamiltoniaan zijn de snelheden eigenlijk de toegevoegde impulsen. Deze tweede vergelijking volgt ook rechtstreeks uit de Legendretransformatie aangezien $\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0$. De andere vergelijking van Hamilton kan je uit de Euler–Lagrangevergelijkingen halen mits wat rekenwerk (uiteraard hoort de kettingregel hier ook bij):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \dot{q}^j \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left(p_i + \dot{q}^j \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i} \right) \end{aligned}$$

Invullen van de tweede vergelijking van Hamilton, die we hierboven reeds bekomen hadden, geeft dan:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n \cancel{\dot{q}^j} \frac{\partial p_j}{\partial \cancel{\dot{q}^j}} - \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} - \cancel{\dot{q}^j} \frac{\partial p_j}{\partial \cancel{\dot{q}^i}} - \frac{d}{dt} \left(p_i + \cancel{\dot{q}^j} \frac{\partial p_j}{\partial \cancel{\dot{q}^i}} - \cancel{\dot{q}^j} \frac{\partial p_j}{\partial \cancel{\dot{q}^i}} \right) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} - \dot{p}_i. \end{aligned}$$

Dergelijke Legendretransformaties komen trouwens overal in de wiskunde en aanverwante vakgebieden voor. In de statistische mechanica en thermodynamica (de studie van grote hoeveelheden deeltjes) relateren ze bijvoorbeeld de druk en het volume of de temperatuur en de entropie (een maat voor de wanorde in een systeem). In de kansrekening en numerieke wiskunde relateren ze dan weer verschillende interpretaties van klassieke optimalisatieproblemen. Dergelijke duale interpretaties zijn vaak heel nuttig omdat ze ons toelaten om een combinatie van technieken toe te passen. Wat ingewikkeld lijkt vanuit een perspectief kan soms heel eenvoudig zijn vanuit een ander.

Nu we twee van de drie (her)formuleringen opnieuw besproken hebben, resteert er ons nog de laatste, het Poissonhaakje. We zullen hiervan nog wat extra eigenschappen bespreken. Het Poissonhaakje is niet enkel waardevol omdat het de notatie compact(er) en coördinaatonafhankelijk maakt. Het is ook razend interessant voor de pure wiskundigen. Als eerste gedraagt het zich als een afgeleide in beide leden (wat niet abnormal is gegeven de definitie), het is lineair en voldoet aan de Leibniz-regel. Bovendien heeft het Poissonhaakje ook nog een extra algebraïsche eigenschap. De klassieke bewerkingen van optelling en vermenigvuldiging hangen niet af van de volgorde en van het plaatsen van haakjes:

$$a + b = b + a \quad \text{en} \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

In moeilijke woorden: ze zijn zowel **commutatief** als **associatief**. Wel nu, het Poissonhaakje heeft wat gekkere eigenschappen. Enerzijds is deze operatie *anticommutatief*:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

Er verschijnt dus een minteken als we de volgorde van de argumenten omdraaien, een beetje zoals bij het uitwendig vectorproduct. Anderzijds voldoet het aan de **Jacobi-identiteit**:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

Als je eens echt gek wil doen, probeer eens te beredeneren hoe je de Jacobi-identiteit kan interpreteren als een Leibnizregel. Dit is een mooi voorbeeld van hoe noties van afgeleide kunnen veralgemeend worden naar abstracte algebra.

Naast deze eigenschappen — de anticommutativiteit zullen we trouwens nog uitgebreid tegenkomen in de volgende hoofdstukken — verbindt het Poissonhaakje ook symmetrieën en ‘slim gekozen’ coördinaten. De belangrijkste reden om van coördinaten te veranderen is gebruikelijk om het probleem te vereenvoudigen. Uiteraard willen we wel dat de bewegingsvergelijkingen (die van Hamilton in dit geval) blijven gelden.

Normaal gezien zouden we op school bij bijvoorbeeld de overgang naar poolcoördinaten onmiddellijk de finale transformatie opschrijven:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right).$$

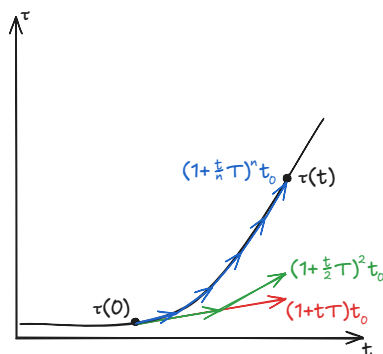
Voor de poolhoek θ zijn er nog wat subtiliteiten om het hele bereik $[0, 2\pi[$ te bekomen, maar die negeren we even voor de eenvoud. Zie het vinden van de correcte formule als nog een oefening.

Hier gaan we echter wat anders te werk, meer in lijn met wat we in het volgende hoofdstuk zullen zien. We laten ons opnieuw leiden door de oude Grieken met in dit geval de *paradox van Zeno*. Hierin wordt een (eindig) pad opgedeeld in ‘infinitesimaal’ kleine stukjes, en, zo argumenteerde Zeno, als je probeert te wandelen door elke keer een klein stukje weg af te leggen, dan geraak je nergens. Maar dat is nu net wat wij wel gaan doen! Laten we dit eerst in één dimensie bekijken. Je hebt een coördinaat t

(bijvoorbeeld de tijd) en je wil een transformatie $\tau(t)$ definiëren. Dan kan je onder gunstige omstandigheden zeggen hoe de transformatie eruitziet voor heel kleine stapjes $\delta t \approx 0$ want in het vorige hoofdstuk zagen dat elke (gladde) functie lineair benaderd kan worden (zie Figuur 1.7):

$$\tau(\delta t) = (1 + \delta t \cdot T)t_0.$$

De afgeleide is wat we hier de **generator** T (van de transformatie) zullen



Figuur 2.10: Genereren van de exponentiële functie.

noemen:

$$\frac{d\tau}{dt}(0) = T.$$

De (infinitesimale) transformatieregel kan je als volgt interpreteren. Je start van het beginpunt t_0 en voor een stap $\delta t = 0$ wil je natuurlijk dat je het beginpunt terugkrijgt, we moeten dus minstens $\tau(0) = t_0$ hebben. De generator, de afgeleide van de transformatie, zegt ons dan in welke richting we ons verplaatsen en wat onze stapgrootte zal zijn. (In één dimensie komt dit gewoon neer op hoe groot onze stap is.)

Net zoals je een wandeling aflegt door veel (mogelijks kleine) stappen te zetten, kunnen we hier de transformatie τ voor een grotere waarde $t > 0$ bekomen door deze in kleine stukjes δt op te splitsen:

- 1^e benadering: $\tau(t) \approx (1 + tT)t_0$.
- 2^e benadering: $\tau(t) \approx (1 + \frac{t}{2}T)(1 + \frac{t}{2}T)t_0$.
- n^e benadering: $\tau(t) \approx (1 + \frac{t}{n}T)^n t_0$.
- Limiet: $\tau(t) = \exp(tT)t_0$.

Als deze vergelijkingen complete magie lijken, geen zorgen, op de figuur op de voorgaande pagina staan de verschillende stappen uitgebeeld. We hebben hier eigenlijk de afleiding van de exponentiële functie gegeven (zie de extra's uit vorig hoofdstuk). De generator laat ons toe problemen uit de calculus ter herleiden tot problemen in de algebra, iets waar we vaker naar op zoek zijn in de (theoretische) fysica. Dit maakt ons het leven vaak eenvoudiger, maar zoals we zullen zien in Hoofdstuk 4 en verder, zorgt het er soms voor dat we essentiële informatie verliezen.

Gewapend met de kennis over transformaties en generatoren, laat ons eens gek doen en voor een willekeurige (gladde) functie $f(q, p)$ een infinitesimale transformatie beschouwen waarvoor de generator gegeven wordt door het Poissonhaakje:

$$Q(q, p) := q + \varepsilon\{q, f\} \quad \text{en} \quad P(q, p) := p + \varepsilon\{p, f\},$$

waar ε een heel klein getal is. (Echt heel klein zelfs zoals we in Hoofdstuk 6 zullen zien.) Wel, als je deze formules in de vergelijkingen van Hamilton zou invullen, dan zou je merken dat die vergelijkingen blijven gelden op een correctieterm na die afhangt van ε . Aangezien $\varepsilon \approx 0$ is die benadering echter voldoende, je kan de correctie verwaarlozen. Maar wacht eens even, de bewegingsvergelijkingen met het Poissonhaakje waren de volgende:

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} \quad \text{en} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}.$$

We zien dus dat tijdsevolutie eigenlijk overeenkomt met een (coördinaten)transformatie gegeneerd door de Hamiltoniaan! (Dit zullen we opnieuw tegenkomen in Hoofdstuk 4 waar dit idee tot de Schrödingervergelijking leidt.)

Als kers op de taart kunnen we hier nu ook nog de symmetrieën bij gooien. Een symmetrie was een transformatie die een fysisch systeem invariant laat of dus die de tijdsevolutie niet beïnvloedt. Met andere woorden, de transformatie gegeneerd door een symmetrie X laat de Hamiltoniaan invariant:

$$H = H + \varepsilon\{H, X\} \iff \{H, X\} = 0.$$

Maar, zoals we zagen is het Poissonhaakje anticommutatief. Er geldt dus ook dat

$$\{X, H\} = 0.$$

In lijn met de vorige paragraaf betekent dit dat de tijdsevolutie van de symmetriegenerator X zelf triviaal is, de generator is constant doorheen de tijd. We hebben met andere woorden een behouden grootheid gevonden in het Hamiltoniaanse formalisme, net zoals het theorema van Noether een behouden grootheid voorspelde in het Lagrangiaanse formalisme!

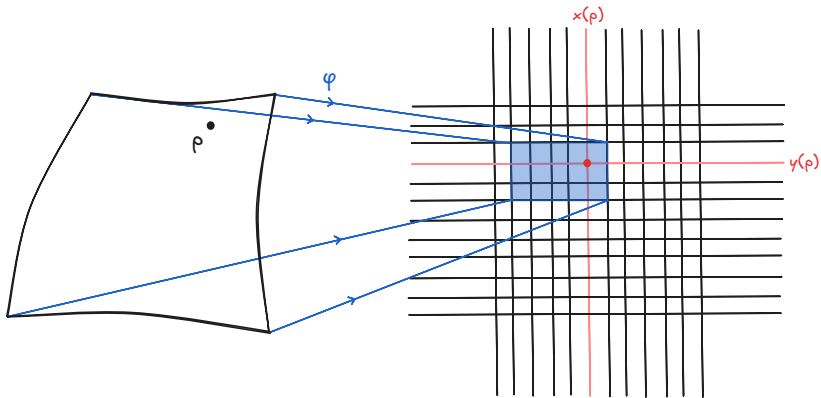
Hoofdstuk 3

Meetkunde van Gauss tot Einstein

In de vorige twee hoofdstukken hebben we de klassieke mechanica ontleed met als kroonjuweel het Poissonhaakje. Centraal in het verhaal stond onder meer de leuze dat we alles zo meetkundig mogelijk willen uitdrukken, zelfs al hebben we hier soms ook wel eens inbreuk op gemaakt. Als er al coördinaten aan te passen mogen komen, dan enkel op zo een manier dat ze ons leven zo eenvoudig mogelijk maken en dat we eenvoudig kunnen transformeren naar een ander stel coördinaten. Omdat dit idee zo centraal en zo belangrijk is, zullen we eerst een paar stappen terug zetten en het concept ‘coördinaat’ eens wat beter bestuderen [3]. Let op, dit hoofdstuk zal opnieuw een paar treden op de ladder der abstractie omhoog zetten!

Het zou niet als een verrassing mogen aankomen als we tegenwoordig aannemen dat de Aarde een bol is. We kunnen bijvoorbeeld met een boot helemaal ‘rond’ varen zonder ergens af te vallen. Om ons hierbij te helpen, proberen mensen al eeuwenlang de perfecte kaart te tekenen. Maar wat ze ook proberen, er lijkt wel altijd iets mis te lopen. De afstanden

komen niet uit, de verhoudingen kloppen niet, de oriëntaties zijn mis, ... Kortom, cartografen leken lange tijd iets fundamenteels over het hoofd te zien. Onder andere dit mysterie zette wiskundigen aan het denken. Is het überhaupt mogelijk om de 'perfecte' kaart te maken? Je kan het al raden, dit is niet mogelijk. Toch niet als we eisen dat zowel lengtes als hoeken behouden blijven.



Figuur 3.1: Een kaart van een zadeloppervlak.

Een kaart maken komt eigenlijk neer op het invoeren van een aantal coördinaten zodat elk punt dat we willen beschrijven, overeenkomt met een (uniek) stel coördinaten. Dit is ook exact wat wij willen doen in onze beschrijving van de fysica en de natuur. We kunnen dus maar beter goed kijken naar wat meneer Gauss en zijn kompanen hierover gezegd hebben. Zij wisten de noties van kaarten en coördinaten zodanig te abstraheren dat ze er stellingen over konden bewijzen. Eenvoudig gezegd is een kaart voor een n -dimensionaal object niets meer dan een keuze van n getallen voor elk punt, maar net zoals het heel moeilijk is om een groot gebied in voldoende detail op één kaart te krijgen, zullen wij ook altijd lokaal werken. Als het er trouwens minder dan n waren, dan zouden sommige punten dezelfde coördinaten krijgen. Omgekeerd, als het er meer dan n waren, dan zouden we coördinaten op overschot hebben. Voor de slimmeriken

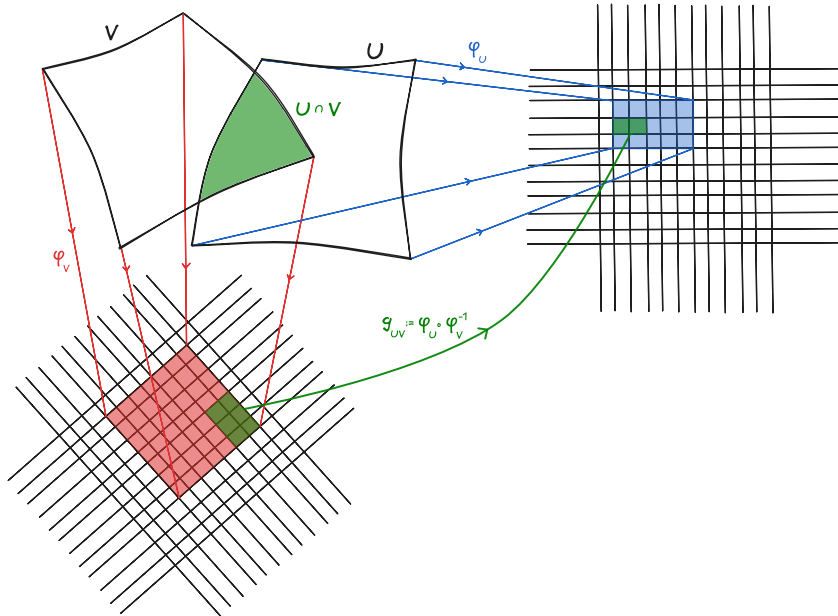
die nu bijvoorbeeld denken “maar je kan toch ook een een-op-eenrelatie tussen het vlak \mathbb{R}^2 en de reële lijn \mathbb{R} vinden?” Jazeker, dat is correct, maar dit verband is niet continu of glad. Het maakt gekke sprongen en dat is niet echt nuttig voor een goede kaart.

Dat terzijde, zou het ook wel leuk zijn indien onze kaarten de werkelijkheid niet te veel vervormen en geen wilde sprongen maken. Dit leidt ons tot de volgende definitie: een **kaart** (voor een n -dimensionale ruimte) is een continue en inverteerbare functie $\varphi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gedefinieerd op een stukje U van die ruimte. Inverteerbaar verwijst naar het feit dat onze coördinaten punten op een unieke wijze moeten beschrijven. We moeten dus ook een functie in de andere richting hebben die coördinaten in \mathbb{R}^n naar punten in U stuurt. Continu betekent daarentegen dat de coördinaten niet plots veranderen als we een klein beetje opschuiven. Deze noties hangen niet af van voorop vastgelegde coördinaten, dus we kunnen ze hier zonder problemen gebruiken. Het is belangrijk om dit altijd te controleren in een nieuwe definitie. Je wil geen cirkelredenering krijgen.

De inverteerbaarheid van de kaarten φ_U helpt ons ook met een andere kwestie. In de vorige hoofdstukken hebben we op meerdere momenten onze standaardcoördinaten x, y en z ingeruild voor een andere keuze, zoals de bolcoördinaten r, φ en θ , maar we zouden dit uiteraard graag in het algemeen kunnen doen. Wel, stel dat we twee kaarten φ_U, φ_V hebben zoals in Figuur 3.2 bovenaan de volgende pagina, zodat we voor punten in het overlappende gebied over twee stel coördinaten beschikken. Aangezien φ_V inverteerbaar is, kunnen we van het ene stel coördinaten teruggaan naar de doorsnede $U \cap V$ en van daaruit met φ_U op het ander stel coördinaten overgaan. De notatie die we voor deze **transitiefunctie** zullen gebruiken is de volgende:

$$g_{UV} := \varphi_U \circ \varphi_V^{-1}.$$

Deze maakt duidelijk dat g_{UV} van de coördinaten in de kaart V naar de coördinaten in kaart U gaat, en de ‘ g ’ is de afkorting van... Nee, soms kiezen wiskundigen simpelweg de eerste letter die hen te binnen schiet en die geen f is. De transformatie in de andere richting is dan simpelweg



Figuur 3.2: Transitiefunctie tussen twee kaarten.

$g_{VU} = \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} = g_{UV}^{-1}$, de inverse transitiefunctie. (Onthoud wel dat de transitiefuncties enkel op overlappende gebieden $U \cap V$ gedefinieerd zijn.) Ter verduidelijking bespreken we nog eens een tweedimensionaal voorbeeld met de klassieke coördinaten (x, y) en (r, θ) . De transformatie g_{UV} van poolcoördinaten naar Cartesiaanse coördinaten is in dit geval

$$g_{UV} : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Het invoeren van abstracte kaarten en coördinaten is echter het eenvoudigste probleem om op te helderen. In bovenstaand voorbeeld zien we zelfs dat de transitiefunctie overal goed gedefinieerd is, de doorsnede $U \cap V$ beslaat het hele vlak. Om de onmogelijkheid tot het maken van de perfecte kaart aan te tonen, zullen we nog heel wat meer werk hebben. We moeten dat woordje 'vlak' leren karakteriseren. Eerst moeten we beslissen

wat we gaan aanvangen met onze waaier aan kaarten en je kan het misschien al raden, we gaan een [atlas](#) maken. Dit is simpel gezegd een verzameling kaarten die de ruimte volledig bedekken, elk punt moet toch met ten minste één kaart te beschrijven vallen. Bovendien zouden we ook wel graag toegang hebben tot de calculus en afgeleiden blijven gebruiken, dus we gaan ook eisen dat alle transitiefuncties g_{UV} glad zijn. Een meetkundige ruimte of meetkundig object met een atlas die aan deze twee voorwaarden voldoet, wordt ook wel een ([gladde](#)) [variëteit](#) genoemd.¹ Let op, in de fysica en datawetenschappen wordt de term variëteit spijtig genoeg vaak verkeerdelijk rondgestrooid, maar wij gaan dit rechtzetten!

Hiermee zijn we klaar om de inhoud van de voorgaande hoofdstukken uit te breiden naar onze nieuwe meetkundige wereld der variëteiten die we zullen aanduiden met de letter M (van het Engelse *manifold*). De leidraad in dit verhaal zal zijn dat we altijd lokaal, dat wil zeggen in een bepaalde kaart, de klassieke definities blijven hanteren en deze lokale objecten zullen proberen aaneenplakken aan de hand van de transitiefuncties om zo een globaal gedefinieerd object te bekomen. We zullen daarvoor beginnen met functies en afgeleiden. Elke functie $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ die we kunnen bedenken heeft in een gegeven kaart U een lokale coördinatenuitdrukking:

$$f_U := f \circ \varphi_U^{-1}.$$

We gaan eerst van lokale coördinaten in de kaart naar ruimtelijke punten in de variëteit en dan passen we onze functie f toe. De functie f wordt zelf [glad](#) genoemd als de lokale variant f_U glad is volgens onze ‘oude definitie’ voor eender welke kaart. Voor afgeleiden volgen we dezelfde logica. Lokaal definiëren we de afgeleide van een (gladde) functie $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ als de ‘oude’ afgeleide van zijn lokale uitdrukking:

$$\partial_i f|_U := \frac{\partial f_U}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \varphi_U^{-1}).$$

¹Niet te verwarren met het Engelse woord *variety*, wat een soort analoog object met veeltermen in plaats van gladde functies vormt. Wat wij een variëteit noemen heet in het Engels een *manifold*. Dit mag je dan op zijn beurt niet verwarren met het Nederlandstalige ‘veelvlak’.

Op zich zou deze definitie niet zo gek of verrassend mogen zijn. We moeten echter wel kijken of we deze lokale uitdrukkingen echt kunnen aanenplakken om een globaal object te bekomen. Op de overlap van twee kaarten U, V kunnen we tussen de lokale uitdrukkingen van een functie wisselen door middel van de transitiefuncties:

$$f_V = f \circ \varphi_V^{-1} = (f \circ \varphi_U^{-1}) \circ (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}) = f_U \circ g_{UV}.$$

Zoals verwacht geeft g_{UV} ons de nodige vertaling van coördinaten. Dit kunnen we nu gebruiken om de afgeleiden samen te bundelen:

$$\partial_i f|_V = \frac{\partial}{\partial y^i} (f_U \circ g_{UV}) \stackrel{\text{ketting}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_U}{\partial x^j} \frac{\partial g_{UV}^j}{\partial y^i} \stackrel{\text{definitie}}{=} \sum_{j=1}^n (\partial_j f|_U) \frac{\partial g_{UV}^j}{\partial y^i}.$$

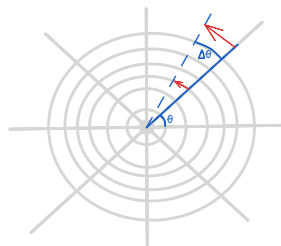
De transformatieregel lijkt hier al heel wat complexer (ook al is het alweer een eenvoudige toepassing van de kettingregel). Als eerste de notatie g_{UV}^j . De transitiefunctie g_{UV} beeldt n coördinaten af op n coördinaten en $x^j = g_{UV}^j(y^1, \dots, y^n)$ is hier de j^e component van. In het voorbeeld van de poolcoördinaten hebben we bijvoorbeeld $g_{UV}^x = r \cos(\theta)$. Daarnaast zien we dat de afgeleide van een functie in de ene kaart niet meer overeenkomt met een coördinaatsafgeleide in de andere. Het is een som over dergelijke afgeleiden geworden, waarbij de coëfficiënten niet gegeven worden door de transitiefunctie zelf, maar door zijn afgeleiden! Die afgeleiden van de transitiefunctie zijn zo belangrijk in de wiskunde dat ze hun eigen naam en notatie krijgen. De **Jacobiaan**

$$J(g_{UV})_i^j := \frac{\partial g_{UV}^j}{\partial x^i}$$

kan je opschrijven als een **matrix**, maar waar die uit Hollywood rode en blauwe pillen bevatten, bevatten de onze een hoop getallen (we komen deze objecten later nog tegen). Voor de poolcoördinaten wordt de Jacobiaan gegeven door

$$J(g_{UV}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Waar gewone functies invariant zijn onder het veranderen van coördinaten — deze worden ook wel **scalaire** grootheden genoemd — moet je bij afgeleiden expliciet de Jacobiaan in rekening brengen. Op zich is dit natuurlijk niet zo verwonderlijk, de afgeleiden geven een maat van verandering, dus wanneer je die verandering wil uitdrukken in andere coördinaten, moet je zowel de verandering van de functie als die van de coördinaten meetellen (en dit laatste is exact wat de Jacobiaan meet). In de figuur hiernaast is dit gevisualiseerd. Wanneer we de poolhoek θ een kleine beetje veranderen, dan veranderen de x - en y -componenten meer naar mate we verder van het nulpunt verwijderd zijn zoals de Jacobiaan zegt. De onderste rij, $-r \sin(\theta)$ en $r \cos(\theta)$, geeft de verandering van x en y wanneer θ verandert



Figuur 3.3: Effect van Jacobiaan in poolcoördinaten.

Vooraleer we verdergaan moeten we echter toch wat meer vertellen over de algebraïsche eigenschappen van deze afgeleiden. In vorig hoofdstuk zagen we reeds dat afgeleiden lineair zijn en zo de vectorstructuur van (gladde) functies bewaren, maar de pijlen in bovenstaande figuur laten misschien nog wat meer vermoeden. Afgeleiden vormen zelf ook een vectorruimte, we kunnen ze dus ook optellen en vermenigvuldigen met getallen. Net zoals bij functies zijn deze operaties puntsgewijs gedefinieerd:

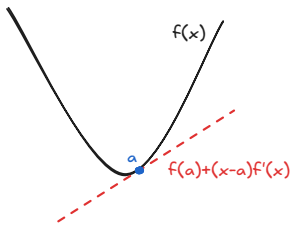
$$(\lambda \partial_i + \partial_j) f := \lambda \partial_i f + \partial_j f.$$

De lineaire structuur is ook gerelateerd aan de opmenging aan de hand van de Jacobiaan. Een van de belangrijkste eigenschappen van vectorruimtes is dat ze een zogenaamde **basis** bezitten. Dit is een verzameling vectoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ die je toelaat om iedere andere vector \vec{v} te schrijven als een (unieke) **lineaire combinatie**, een som van basisvectoren met ge-

paste coëfficiënten:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Het minimale aantal basisvectoren dat nodig is om deze eigenschap te garanderen wordt ook wel de **dimensie** genoemd. De Euclidische ruimte \mathbb{R}^n heeft uiteraard niet toevallig dimensie n . In dimensie twee wordt een basis voor \mathbb{R}^2 bijvoorbeeld gegeven door $(1, 0)$ en $(0, 1)$. Wel nu, de afgeleiden naar de lokale coördinaten $\{x^1, \dots, x^n\}$ vormen een basis voor de vectorruimte van afgeleiden in een punt, de **raakruimte**. De transformatieregel voor afgeleiden die we eerder zagen zegt nu exact hoe we van de ene coördinatenbasis op de andere overgaan. De Jacobiaan geeft de coëfficiënten voor onze lineaire combinaties. (Het was je beloofd dat de abstractie in dit hoofdstuk verder ging toenemen.)

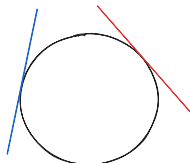


Figuur 3.4: Raaklijn aan een functie.

Maar waarom spreken we hier nu van een ‘raakruimte’? Dit lijkt toch net iets te specifiek te zijn om toeval te zijn. De lezers van de extra’s uit Hoofdstuk 1 herinneren zich misschien nog de bespreking van de afgeleide als de raaklijn in een punt. Voor degene die de extra’s niet gelezen hebben, de afgeleide aan een functie (in één veranderlijke) geeft de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan die functie. Nabij een punt a zal de rechte $f(a) + (x - a)f'(x)$ volledig onder

(of boven) de functie $f(x)$ liggen en deze dus ‘raken’ in a . Als we dit nu uitbreiden naar meerdere dimensies, dan kunnen we raaklijnen in alle richtingen bepalen en dit is exact wat de raakruimte doet. De raakvector $5\partial_1 - 2\partial_2$ bepaalt bijvoorbeeld de raaklijn in de richting waarbij we vijf stapjes langsheen de eerste coördinaat vooruit zetten en twee stapjes langsheen de tweede coördinaat achteruit zetten. Aangezien we zo een basisvector per coördinaat x^i hebben, de afgeleide ∂_i in de richting van die coördinaat, volgt onder meer dat de dimensie van de raakruimte als een vectorruimte gelijk is aan de dimensie van de omringende variëteit.

De raakruimtes geven ons een algebraïsche voorstelling van het meetkundige raakvlak. Exact wat we willen, want algebra blijft veel handiger om mee te rekenen!

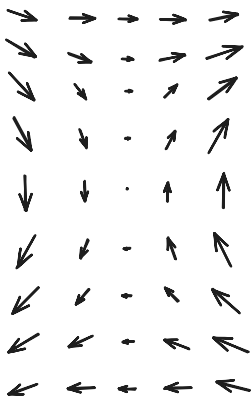


Figuur 3.5: Twee raaklijnen aan de cirkel.

Nu komt een van de belangrijkste opmerkingen in de (differentiaal) meetkunde, een van de punten waar algemene meetkundige objecten zich opmerkelijk anders gedragen dan de (vlakke) Euclidische ruimtes \mathbb{R}^n . Stel je voor dat je op een vlak object staat zoals een schaakbord. Waar je ook staat, de noties van boven/onder en links/rechts zijn overal hetzelfde (zolang je je hoofd niet beweegt). Voorgaande alinea laat ons dit ook nog anders verwoorden. Alle raakvlakken, of dus raakruimtes, aan het vlak vallen eigenlijk allemaal samen, ze zijn het vlak zelf! Maar net zoals de raaklijn aan een functie kan veranderen van punt tot punt, zal ook de raakruimte in het algemeen verschillen van punt tot punt in een variëteit. In het algemeen kan je raakvectoren in twee verschillende punten niet zomaar met elkaar vergelijken. Om deze reden worden de raakruimtes aan twee verschillende punten $p, q \in M$ ook anders genoteerd: $T_p M$ en $T_q M$. (De T van het Engelse *tangent* voor ‘rakend’.) Hoe we ze met elkaar kunnen vergelijken, komen we verder in dit hoofdstuk nog op terug, maar gelukkig hebben we deze gevorderde technologie op dit moment nog niet nodig. Het enige wat we wel nodig hebben is een keuze van raakvector in elk punt. Als die keuze ‘glad’ verandert van punt tot punt dan spreken we van een [vectorveld](#). Lokaal ziet zo een vectorveld er dus als volgt uit:

$$X = \sum_{i=1}^n X^i(x) \partial_i,$$

waarbij de coëfficiënten $X^i(x)$ gladde functies zijn. Het opmerkelijke oog zal het woord lokaal in voorgaande zin misschien wel gezien hebben. Dat de coëfficiënten X^i niet globaal gedefinieerd kunnen worden is trouwens equivalent aan het feit dat we niet toekomen met een enkele kaart om de gehele variëteit te beschrijven.



Figuur 3.6: Twee-dimensionaal vectorveld.

Bovenstaande definitie lijkt misschien heel abstract, maar kortweg is een vectorveld een grootte die in elk in punt van de ruimte gedefinieerd is en die overal een grootte en een richting heeft. Bovendien is er aan vectorvelden geen tekort in de natuur: de snelheid van een deeltje dat doorheen de ruimte beweegt, de windsnelheid en -richting zoals je die soms op een weerkaart kan zien, het elektrisch en magnetisch veld, ... (Vandaar dat deze vaak met pijltjes getekend worden, zo zie je zowel de grootte als de richting en zin.) De zwaartekracht is zelf ook een vectorveld aangezien de richting en grootte op elk punt van de ruimte anders is. De potentiaal V verandert (of kan

veranderen) van punt tot punt, dus de kracht

$$\vec{F}(x) = -\vec{\nabla}V(x)$$

zal ook afhangen van de locatie. Weg met het concept 'krachtvector', welkom aan het zwaartekrachtsveld. (Het meer algemene concept 'veld' zal de hoofdrol spelen in Hoofdstuk 5.)

Laten we nu terugkeren naar de kwestie van het vergelijken van vectoren in verschillende raakruimtes. We willen bijvoorbeeld kunnen zeggen hoe een vectorveld verandert van punt tot punt, we hebben dus als het ware een afgeleide van afgeleiden nodig. Om die vertaling tussen raakruimtes te maken, hebben we een soort woordenboek nodig. Wanneer je bijvoorbeeld een wereldreis onderneemt, zal de taal van land tot land of zelfs van streek tot streek veranderen. Met de extra technologie dat het woordenboek ons biedt, zullen we echter in staat zijn om informatie die we op één plek oppikken om te zetten naar zinvolle informatie op een andere plek. Aangezien het hier bijvoorbeeld zal gaan over hoe onze informatie verandert doorheen de ruimte was de beschrijving 'afgeleide van afgeleiden' eigenlijk geen grap. Dat is exact wat we gaan doen! Om deze nieuwe

afgeleide te kunnen onderscheiden van de gewone afgeleide zullen we ook een nieuwe naam invoeren: **covariante afgeleide**. De covariante afgeleide kan worden gedefinieerd voor alle meetkundige grootheden, dus we beginnen met eenvoudige (gladde) functies:

$$\nabla_Z f := Z(f) = \sum_{i=1}^n Z^i(x) \partial_i f(x).$$

De gelijkenis tussen de notaties $\vec{\nabla}$ voor de gradiënt en ∇ voor de covariante afgeleide is eigenlijk volkomen toeval. Dit getuigt van de soms bedenkelijke notatiekeuzes in de wiskunde en fysica.

Bovenstaande uitdrukking is enerzijds een definitie van hoe een vectorveld inwerkt op een functie, maar anderzijds kan het ook gezien worden als een consistentieregel. Functies zijn de simpelste objecten die we ons kunnen inbeelden, dus het zou mooi zijn als alle noties van afgeleide die we kunnen bedenken gewoon samenvallen voor functies.² De volgende stap (en daar zullen we stoppen, meer hebben we niet nodig) is de covariante afgeleide van een vectorveld. Net zoals voorheen wordt dit gekarakteriseerd door twee eigenschappen:

- Lineariteit:

$$\nabla_Z(\lambda X + Y) = \lambda \nabla_Z X + \nabla_Z Y.$$

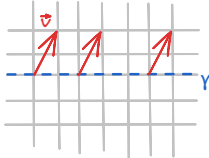
- Leibnizregel:

$$\nabla_Z(fX) = Z(f)X + f\nabla_Z X.$$

Merk op dat we in de bovenstaande uitdrukkingen geen coördinaat x^i meer als index hebben maar een volledig vectorveld X aangezien de covariante afgeleide de verandering langsheen een vectorveld (Z in dit geval)

²Laat ons zeggen dat er heel wat verschillende soorten afgeleiden bestaan in de algebra (differentiaal)meetkunde. Als een kleine *teaser* geven we nog wat andere voorbeelden mee: de *uitwendige* of *de Rham-afgeleide* (vernoemd naar de wiskundige de Rham), de *Lie-afgeleide* (vernoemd naar de wiskundige Lie), de *variationele afgeleide*, de *Kählerafgeleide* (vernoemd naar de wiskundige Kähler), de *Dolbeaultafgeleide* (vernoemd naar de wiskundige Dolbeault), de *Diracoperator*, de *Laplaciaan* (die eigenlijk een soort tweede-ordeafgeleide is),

geeft. Het resultaat is opnieuw een vectorveld, net zoals de afgeleide van een functie opnieuw een functie is.



Figuur 3.7: Parallel transport in het vlak.

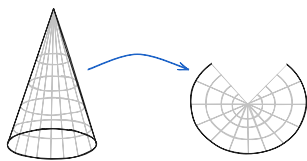
Zoals we eerder zagen, is een vectorruimte volledig bepaald wanneer we een basis kennen. Om de actie van een lineaire operatie op vectoren te definiëren, hebben we dus ook enkel de actie op die basis nodig. Hier wordt de actie van ∇ op de basisvectorvelden samengevat in een lineaire operatie A . In symbolische notatie schrijven we de covariante afgeleide soms als

$$\nabla = d + A.$$

Hij wordt gegeven door de gewone afgeleide, aangeduid met d , die inwerkt op functies en coëfficiënten plus *een* connectieterm A die op basisvectoren inwerkt. Het meetkundig object dat lokaal voorgesteld wordt door A wordt de **connectie** genoemd, aangezien het raakvectoren op verschillende punten met elkaar ‘connecteert’. De vraag is nu natuurlijk of deze connectie uniek is en, indien ze niet uniek is, hoe we ze kunnen kiezen. Het antwoord op de eerste vraag is alvast een heel duidelijke nee (zoals de ‘een’ in de voorgaande zin had kunnen doen vermoeden). Er is een oneindigheid aan mogelijkheden om precies te zijn. Gelukkig zijn er wel vaak natuurlijke of voor de hand liggende keuzes. In ons geval is de belangrijkste keuze degene die hoeken en lengtes behoudt: de **Levi-Civitaconnectie**. Deze connectie is degene die Gauss gebruikte om de cartografen in zijn tijd het leven zuur te maken en ook degene die Einstein later gebruikte in zijn algemene relativiteitstheorie.

Laten we nu eens kijken wat dit praktisch gezien allemaal inhoudt. Beschouw hiervoor eerst terug het vlak \mathbb{R}^2 (of toch een stukje ervan) zoals in Figuur 3.8 op onderstaande pagina. We kunnen de vector \vec{v} zonder probleem parallel transporteren (met behoud van lengte) langsheen het pad γ . Dit kunnen we bijvoorbeeld doen met behulp van onze favoriete geodriehoek. In formulevorm leest dit **parallel transport** als volgt:

$$\nabla_{\gamma^i} \vec{v} = 0.$$

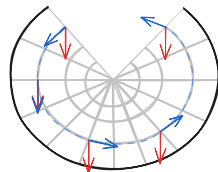


Figuur 3.8: De opengeknipte kegel.

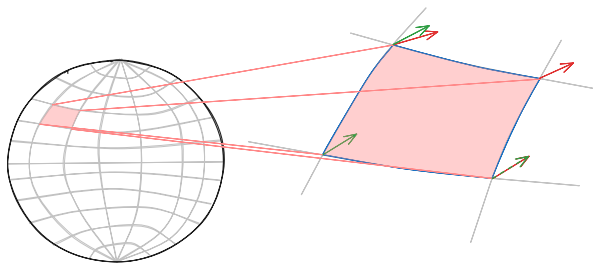
De verandering van de getransporteerde vector in de richting van de raakvector langsheen het pad is nul. In een vlakke ruimte is de connectie A zelf ook nul, aangezien alle raakruimtes gelijk zijn, dus deze vergelijking herleidt zich simpelweg tot $\partial_i v^j = 0$ voor alle hoofdrichtingen (of coördinaten) x^i en componenten v^j . Dit constant blijven lagsheen een pad is nu net wat we willen veralgemenen naar andere meetkundige objecten en variëteiten.

We zullen echter zien dat parallel dan niet meer wil zeggen dat de vectoren constant blijven, ze zullen beginnen draaien en keren (ook al blijft de lengte en relatieve oriëntatie bewaard in het geval van de Levi-Civitaconnectie).

Om te zien hoe vreemd dit kan worden, beschouw de kegel. We kunnen deze op het vlak afbeelden door deze langs een opstaande ribbe open te knippen (zoals hierboven afgebeeld). Dit geeft een vlakke schijf waar een wig is uitgesneden. Als je bijvoorbeeld op de kegel langsheen een hoogtelijn loopt, loop je in het vlak eigenlijk langs een cirkelbaan. Het gevolg is dat het parallel transporteren van een vector de hoek tussen de vector en jouw pad niet zal behouden! Het is de hoek tussen de vector en de omliggende vlakke ruimte die constant blijft. Hiernaast zie je diezelfde opengeknipte kegel met een pad langsheen een hoogtelijn. Er zijn ook twee soorten vectoren te zien. In blauw zie je de raakvectoren langsheen het pad, als het ware de richting waarin je zou lopen en kijken als je dit pad volgt, en in rood zie je een parallel getransporteerde vector. Als je deze figuur zou natekenen, uitknippen en aaneenplakken om een kegel te bekommen, dan zou je zien dat de raakvectoren aan het begin- en eindpunt mooi overlappen, maar de getransporteerde vectoren niet.

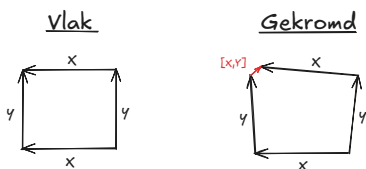


Figuur 3.9: Parallel transport op de kegel.



Figuur 3.10: Parallel transport op de wereldbol.

Wat een gekkigheid! Dergelijk gedrag is de klassieke handtekening van **kromming**, de sleutel tot ons verhaal. Om dit concept verder uit te diepen, laten ook eens kijken naar dat ander gekromd object waar we al meerdere keren over gepraat hebben, de wereldbol. Neem een klein parallellogram op het aardoppervlak zoals in de figuur hierboven. We beginnen met een raakvector in de rechteronderhoek en willen deze verplaatsen naar de linkerbovenhoek. Er zijn nu twee paden waarlangs we de vector kunnen transporteren, eerst naar links en dan naar boven of eerst naar boven en dan naar links. Het resultaat langsheen het eerste pad is in groen getekend, het resultaat langsheen het tweede pad in het rood. Wat we zien is dat de getransporteerde vectoren op het eindpunt niet meer samenvallen, ze zijn een beetje geroteerd ten opzichte van elkaar.



Figuur 3.11: Infinitesimaal parallel transport.

Dit fenomeen kunnen we nu ook proberen kwantificeren, een formule is immers interessant om mee te rekenen. De zijden van zo een infinitesimaal parallellogram worden bepaald door de raakvectoren in de hoekpunten zoals afgebeeld in Figuur 3.11 op de volgende pagina. Laat ons

dus eens kijken hoe een getransporteerde vector verandert langsheen de twee paden en het verschil be-

rekenen tussen die twee resultaten. Bij het onderste pad nemen we eerst de covariante afgeleide langs X en dan langs Y : $\nabla_Y \nabla_X V$. Voor het bovenste pad is dit het omgekeerde: $\nabla_X \nabla_Y V$. Het verschil tussen deze twee vector(velden) is bijna wat we zoeken, maar nog niet helemaal. Kijk nog eens naar de figuur onderaan de voorgaande pagina. Niet alleen lopen de zijden van het parallellogram in de gekromde ruimte niet mooi loodrecht, de paden sluiten niet mooi. Het ontbrekende stukje vector

$$[X, Y] := XY - YX$$

wordt de **commutator** genoemd. Als je trouwens vindt dat deze vergelijking verdacht veel op het Poissonhaakje lijkt, dat is geen toeval. In het volgende hoofdstuk zullen we zien hoe het Poissonhaakje en de commutator aan elkaar gerelateerd worden in de kwantummechanica.

De commutator geeft aan in welke mate X en Y commuteren. Indien $[X, Y] = 0$, dan zou het parallellogram mooi sluiten want de volgorde van de twee operaties speelt dan geen rol. Het totale verschil tussen de getransporteerde vectoren wordt uiteindelijk door de volgende uitdrukking gegeven:

$$R(X, Y)V := [\nabla_X, \nabla_Y]V - \nabla_{[X, Y]}V.$$

De operator $R(X, Y)$ wordt de **(Riemman-)krommingstensor** genoemd, omdat het door Riemann is bestudeerd en de kromming bepaalt. Gewapend met deze krommingstensor zijn we eindelijk klaar om het belangrijke resultaat van Gauss uit de doeken te doen. Het zogenaamde *Theorema Egregium*, Latijn voor ‘uitzonderlijke stelling’, stelt dat de krommingstensor niet afhangt van onze keuze van coördinaten en kaarten en zelfs niet van de omliggende ruimte waar ons object zich in bevindt. Ook al beschouw je de bol meestal als een onderdeel van de driedimensionale ruimte, zijn kromming is een intrinsieke eigenschap. Bovendien, als je twee objecten hebt die je in elkaar kan transformeren zodanig dat zowel onderlinge standen als lengtes behouden blijven, dan hebben zij noodzakelijk dezelfde kromming! Maar dit is nu net wat cartografen trachtten te bekomen, zij wouden het aardoppervlak op een vlakke kaart afbeelden zonder deze te

vervormen. Spijtig genoeg hebben het vlak en het aardoppervlak een verschillende kromming. De wiskundigen waren er dus in geslaagd om een nobel beroep ten einde te brengen.

Gelukkig betekent elk einde ook een nieuw begin. Het werk van Gauss en dan voornamelijk later Riemann, die de resultaten naar hogere dimensies wist te veralgemenen, stelde Einstein en kompanen in staat Newton zijn zwaartekrachtwet te verfijnen. Aan het begin van de twintigste eeuw hadden astronomen al een tijdje in de gaten dat de baan van Mercurius rond de zon niet volledig overeenkwam met die voorspeld aan de hand van de wetten van Newton. Om dit op te lossen kwam Einstein met een radicaal nieuw idee op de proppen, iets wat trouwens niet zo uitzonderlijk was voor hem. Hij had eerder al de speciale relativiteitstheorie geïntroduceerd, waarin hij zegt dat ruimte en tijd twee facetten van eenzelfde structuur zijn (de [ruimtetijd](#)), en in datzelfde jaar had hij ook de eerste stenen gelegd voor de kwantummechanica door te stellen dat licht uit deeltjes ([kwanta](#)) bestond. Het was trouwens van die speciale relativiteitstheorie dat hij vertrok om de zwaartekracht te herontdekken. In de speciale relativiteitstheorie neem je de gebruikelijke Euclidische ruimte \mathbb{R}^3 en plak je er een tijdsdimensie aan vast om zo $\mathbb{R}^{1,3} \cong \mathbb{R}^4$ te krijgen, de [Minkowski-ruimte](#).

Op zich lijkt dit niet zo heel bijzonder want je hebt nog steeds een vlakke ruimte(tijd), alleen is ze nu vierdimensionaal. Maar Einstein had goed geluisterd naar zijn wiskundige vrienden en was op de hoogte van het idee achter variëteiten, ook al kwam de algemene definitie met kaarten en atlanten zoals wij ze hier hanteren pas enkele jaren later. Het idee dat sommige ruimtes enkel lokaal met coördinaten beschreven kunnen worden, was echter wel al een gevestigde waarde.. Zijn plan was om het universum, ons universum, te beschrijven als een vierdimensionale variëteit die lokaal lijkt op de vlakke ruimtetijd. Dit is het [equivalentieprincipe](#) dat zegt dat er lokaal geen verschil bestaat (je kan het dus niet meten met een experiment) tussen een versnellend referentiestelsel en een referentiestelsel onderhevig aan de zwaartekracht. Het typische voorbeeld hiervoor is een afgesloten lift in het luchtledige. Stel dat jij in die lift staat en een ap-

pel laat vallen, waarbij je meet dat de appel versnelt aan de valversnelling. Komt dit omdat de lift stilstaat op Aarde of omdat de lift omhoog versnelt aan de valversnelling? Er is geen manier om hier een onderscheid te maken!

De kaarten in de algemene relativiteitstheorie worden dus beschreven door de speciale relativiteitstheorie. Nu kan je je misschien afvragen in welke zin er een verschil is tussen een variëteit die lokaal op \mathbb{R}^4 lijkt (Euclidisch) of lokaal op $\mathbb{R}^{1,3}$ lijkt (Minkowski). Als vectorruimtes is er bijvoorbeeld geen verschil tussen die twee, beiden zijn vierdimensionaal en alle vectorruimtes van dezelfde dimensie zijn equivalent. Er is echter wel een verschil als we ook naar het concept van lengte of afstand kijken. In een Euclidische ruimte gebruiken we de volgende [metriek](#):

$$d_{\text{Eucl}}(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \dots}.$$

Je neemt het verschil van alle componenten, kwadrateert deze en berekent de som. Dit zie je bijvoorbeeld in de definitie van de cirkel: $x^2 + y^2 = r^2$. In de Minkowskiruimte gedraagt de tijdscoördinaat zich echter anders, daar komt een minteken te staan:

$$d_{\text{Mink}}(\vec{x}, \vec{y}) := \sqrt{-(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + \dots}.$$

Waar in de Euclidische meetkunde de rotaties en puntspiegelingen de afstand invariant laten, komen er in de Minkowskimeetkunde de (*Lorentz boosts*) bij. Dit zijn transformaties die ruimte en tijd in elkaar omzetten, zoals wanneer je een snelheid verschillend van nul hebt (denk bijvoorbeeld aan het Dopplereffect voor licht). Merk wel op dat het concept van *boosts* ook in de niet-relativistische mechanica bestaat. Herinner je je nog dat Newton's eerste wet zei dat er een inertiaalstelsel bestond (een stelsel waarin een object enkel versnelt als er een kracht op inwerkt)? Wel, er zijn er eigenlijk oneindig veel en ze verschillen allemaal door de uniforme snelheid v waarmee ze zich ten opzichte van elkaar bewegen. Een niet-relativistische (Galileaanse) *boost* transformeert tussen twee klassieke inertiaalstelsels: $t' = t$ en $x' = x - vt$. Dit zijn voorbeelden van een

meer algemene constructie in de wiskunde: [Cartanmeetkunde](#). De wiskundige Klein had met zijn Erlangenprogramma een classificatie van een reeks meetkundige ruimtes aan de hand van hun symmetriegroep geproduceerd. Het idee van Cartan was dan om meer algemene ruimtes lokaal via hun Kleinmeetkunde te beschrijven, in analogie met hoe variëteiten lokaal Euclidisch zijn. Dit kan dus gezien worden als een meer verfijnde opdeling.

Deze uitweiding terzijde zien we dat ons universum, alhoewel het lokaal vlak is, globaal gekromd kan zijn! Maar vanwaar komt die kromming? Wel, dat is nu net de zwaartekracht:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Zonder al te veel in te gaan op de technische details achter deze [veldvergelijkingen van Einstein](#), laat ons toch even de verschillende termen interpreteren. In het linkerlid staat twee keer de letter R . Deze wiskundige objecten zijn gerelateerd aan de krommingstensor. Het linkerlid beschrijft dus de kromming van het universum. In het rechterlid staan twee andere belangrijke letters. Enerzijds de G , de zwaartekrachtconstante van Newton, en anderzijds de T , een (meetkundig) object dat de verdeling van massa en energie in het universum beschrijft. Deze vergelijking stelt dus dat “de ruimtetijd zegt aan materie hoe te bewegen en de materie zegt aan de ruimtetijd hoe te krommen”.³ Alles wat energie bevat — wegens de speciale relativiteitstheorie en kwantummechanica is dit letterlijk alles, zelfs het vacuüm — zorgt ervoor dat de ruimtetijd kromt en die kromming zorgt er dan weer voor dat er een zwaartekrachtsveld lijkt te ontstaan, want de banen van objecten buigen af. Die ‘lijkt’ is ook de reden waarom sommige mensen zeggen dat de zwaartekracht geen echte kracht is. Dergelijke uitspraken zijn echter eerder een filosofische of taalkundige kwestie. Ze zouden bijvoorbeeld impliceren dat de andere fundamentele

³Dit is de vertaling van een legendarisch citaat van de natuurkundige Wheeler: “*Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.*”

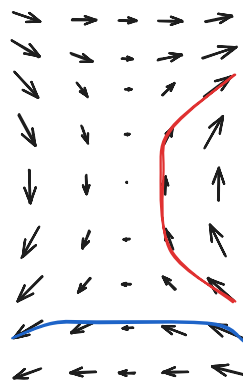
krachten (elektromagnetisme en de zwakke en sterke wisselwerking) ook geen echte krachten zijn, want zoals we zullen zien in Hoofdstuk 5 zijn deze net zoals zwaartekracht het gevolg van een soort kromming. In dit boek zullen wij echter geen ketters in de kerk van Newton spelen. Zelfs in het revolutionaire werk van Einstein blijft er een spoor van het genie van Newton achter, de zwaartekrachtconstante G . Om te zien hoe je de Newtoniaanse ‘benadering’ uit de veldvergelijkingen van Einstein kan bekomen, zul je echter de extra’s moeten lezen.

Extra’s

Net als in de vorige hoofdstukken is ook hier wat plaats voor wat meer details. Gezien de inhoud en materie van dit hoofdstuk, kan dit waarschijnlijk ook geen kwaad. Als eerste keren we even terug naar de vectorvelden en wat het precies betekent om in de richting van een vectorveld te bewegen. Beschouw hiervoor een algemeen (glad) pad $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$. Lokaal wordt dit beschreven door n componenten $\gamma^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, één voor elke coördinaat. De n tijdsafgeleiden kunnen we bundelen in een vectorveld:

$$\dot{\gamma}(t) := \dot{\gamma}^i(t)\partial_i.$$

(Merk op dat dit opnieuw neerkomt op de kettingregel voor de totale tijdsafgeleide, gelukkig maar.) Bewegen in de richting van een vectorveld X betekent nu niets meer dan dat we een pad beschouwen waarvan het raakvector(veld) $\dot{\gamma}$ gelijk is aan X . Hier kunnen we nu gebruikmaken van de abstracte eigenschappen van vectorruimtes en basissen. De coördinaatsvectorvelden ∂_i vormen een basis, dus ieder ander vectorveld kan op een en slechts een manier uitgedrukt worden in



Figuur 3.12: Stroming van een vectorveld.

termen van deze vectorvelden:

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = X^i$$

voor alle dimensies $i = 1, \dots, n$. We krijgen n (differentiaal)vergelijkingen die als oplossing ons gewenste pad hebben. Lokaal bestaat zo een oplossing trouwens altijd! Het pad dat als oplossing gevonden kan worden wordt soms ook wel de **stroming** genoemd naar analogie met water- of luchtstromen. Zoals eerder vermeld kunnen we bijvoorbeeld de windsnelheid en -richting voorstellen als een vectorveld. De geassocieerde stroming komt dan overeen met de stroming of beweging van een lucht- of stofdeeltje dat meedrijft op de wind. (In Figuur 3.12 zijn twee van deze paden aangeduid.) Als je een deeltje op positie $\gamma(0)$ begint te volgen, dan zal het zich op tijdstip t op positie $\gamma(t)$ bevinden.

De formules die we in dit hoofdstuk gezien hebben, laten ons ook toe om de actie van de covariante afgeleide op een vectorveld wat explicieter uit te werken. Vooraleer we dit kunnen verwezenlijken, moeten we wel eerst wat doen aan onze notaties. Aangezien zowat alle formules sommaties over coördinaten zullen bevatten, zou het wel interessant zijn moest dat sommatietekens impliciet gehouden kunnen worden. Hiervoor schiet Einstein ons te hulp:

$$X^i \partial_i \equiv \sum_{i=1}^n X^i \partial_i, \quad X^i (\partial_i Y^j) \partial_j \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X^i (\partial_i Y^j) \partial_j, \dots$$

Herhaalde indices, eentje onderaan en eentje bovenaan, stellen een sommatie voor. De kettingregel kunnen we hiermee nu heel beknopt noteren:

$$\partial_i (f \circ g) = \partial_i f \partial_j g^j.$$

Om de covariante afgeleide te berekenen, beschouwen we nu lokaal het vectorveld $X|_U = X^i \partial_i$. De Leibnizregel geeft de volgende uitdrukking:

$$\nabla_j X|_U = (\partial_j X^i) \partial_i + X^i \nabla_j \partial_i.$$

Maar het resultaat van de covariant afgeleide is opnieuw een vectorveld, dus de tweede term $\nabla_j \partial_i$ moet opnieuw kunnen worden uitgedrukt in de

basis $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ door middel van coëfficiënten A_{ji}^k (die je als een driedimensionale matrix kan zien):

$$\nabla_j \partial_i = A_{ji}^k(x) \partial_k.$$

Alles samen wordt dit

$$\nabla_j X|_U = (\partial_j X^i + X^i A_{ji}^k) \partial_k.$$

Hieruit volgt onder andere dat, net zoals bij de gewone afgeleiden, de covariante afgeleide ook lineair is in het argument Z , het vectorveld in richting waarvan we afleiden. Dit is de ontbinding $\nabla = d + A$ van de covariante afgeleide in termen van de connectie.

We kunnen ook eens kijken naar wat Einstein te zeggen had over de paden gegeneerd door een vectorveld. De bewegingsvergelijking van een deeltje in de algemene relativiteitstheorie wordt niet meer gegeven door de tweede wet van Newton. In Einstein zijn theorie worden de banen van deeltjes gegeven door **geodeten**. Dit zijn paden die, in de volksmond, (lokaal) de kortste weg tussen twee locaties geven. Een andere, equivalente definitie die de subtiliteiten in het concept 'kortste weg' voorkomt, is de volgende. Een geodeet is een pad waarvan de raakvector parallel wordt getransporteerd langsheen het pad:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Als het ware lijkt het pad recht voor een waarnemer die het bewandelt. Omdat deze vergelijking zo fundamenteel is voor de fysica, schrijven we hem ook nog even in lokale coördinaten door gebruik te maken van de uitdrukking van de covariante afgeleide in termen van de connectie uit de voorgaande paragraaf (hier noteren we de connectie zoals gebruikelijk in de algemene relativiteitstheorie met de Griekse Γ):

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

(Als je dit als oefening zelfs een probeert, er zit alweer een toepassing van de kettingregel in verstopt.) Die eerste term lijkt nu wel verdacht goed op

de versnelling zoals die voorkomt in de tweede wet van Newton. Zou er dan toch een verband zijn? Uiteraard is er een verband en dat is ook niet zo toevallig. De algemene relativiteitstheorie mag dan een ‘betere’ beschrijving geven van ons universum, in het alledaagse leven zijn de wetten van Newton wel degelijk accuraat. Laten we dus een niet-relativistisch deeltje beschouwen zoals wijzelf aangezien we niet aan de lichtsnelheid bewegen, noch in de buurt van een zwart gat leven. Hierbij gelden twee voorwaarden:

- $\dot{x}^t \approx 1$: De ‘snelheid doorheen de tijd’ is ongeveer gelijk aan de lichtsnelheid. In mensentaal betekent dit dat jouw klok op een normale manier tikt, er is geen vervorming van jouw tijdsgevoel ten opzichte van een stilstaande waarnemer.
- $\dot{x}^i \approx 0$: De ruimtelijke snelheid is veel kleiner dan de lichtsnelheid. (Ook voor een straaljager of een raket is dit voldaan.)

Als aan deze twee voorwaarden is voldaan, worden de impliciete sommen in de geodetische vergelijking (herinner je je nog de Einsteinsommatie) sterk vereenvoudigd, ze vallen zelfs weg:

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{tt}^i = 0.$$

Eigenlijk zouden we wat meer technische details achter de Levi-Civita-connectie moeten kennen, maar om ons niet door al die details te moeten worstelen en de formules niet te veel uit de lucht te laten vallen, zullen we het antwoord fysisch plausibel maken (iets waar Einstein zeer goed in was). De connectie A is gerelateerd aan veranderingen in ruimte en tijd en zal dus waarschijnlijk een afgeleide bevatten (dit is de eenvoudigste mogelijkheid):

$$\Gamma_{tt}^i = \partial_i \phi$$

voor een (gladde) functie ϕ , de zwaartekrachtpotentiala. Als we dit nu invullen in bovenstaande formule krijgen we:

$$\ddot{x}^i = -\partial_i \phi.$$

Komt dit je nog bekend voor? Dit is exact de tweede wet van Newton!

Hoofdstuk 4

Kwantummechanica met Dirac

Dit hoofdstuk bestaat uit twee delen, al lopen die wel wat door elkaar. Enerzijds zullen we de kwantummechanica introduceren, of toch minstens enkele van de wiskundige tools die daarvoor nodig hebben. Er zijn reeds voldoende boeken geschreven die verhalen over de interpretaties en geschiedenis van de kwantummechanica [1, 8]. Anderzijds zal er ook een link gelegd worden met de meetkundige en algebraïsche facetten van de voorgaande hoofdstukken door middel van de ‘kwantisatie van klassieke theorieën’. Dat dit mogelijk is, is echter niet zo vanzelfsprekend. De overgang van klassiek naar kwantum is tot de op de dag van vandaag nog niet volledig begrepen. We zullen dus ook zeker niet ingaan op alle aspecten van de kwantummechanica (nog veel minder dan bij de klassieke mechanica uit voorgaande hoofdstukken). Zaken zoals *verstrengeling* of *kwantumcomputers* komen niet aan bod (op een mogelijke verwijzing na).

Het idee achter kwantummechanica is niet meer dan het discretiseren van de klassieke mechanica. Op zich is dit eigenlijk zelfs niet zo heel incorrect. In de klassieke fysica is alles heel continu, vaak bij aanname. Alle

grootheden zijn op alle locaties gedefinieerd, objecten kunnen zich op eender welke locatie bevinden (behoudens fysische obstructies), ze kunnen zich met eender welke snelheid voortbewegen (zolang het maar trager is dan de lichtsnelheid) en de energie kan eender welke waarde aannemen. Maar net hier knelt het schoentje. Aan het eind van de 19^e eeuw waren er reeds fenomenen gekend die hiermee leken te botsen. Bovendien leidden de klassieke theorieën die van continuïteit uitgingen tot onmogelijke conclusies. Weg met het continuüm dus! Kwantummechanica stelt dat zo goed als alle fysische grootheden in de meeste situaties maar een discreet, doch niet noodzakelijk eindig, aantal mogelijke waarden kunnen aannemen. Calculus is hiervoor niet meer de ideale taal, maar gelukkig kennen we nog een andere, die van de algebra en vectorruimtes. Elke toestand die een systeem kan aannemen, wordt beschreven door een vector die we net zoals Dirac als volgt zullen noteren:

$$|\psi\rangle.$$

Nu, deze simpele veronderstelling dat kwantummechanische systemen door vectoren beschreven worden, brengt al een eerste waanzinnige eigenschap van de kwantummechanica met zich mee. Aangezien de som van twee vectoren opnieuw een vector is, is de som van twee toestanden ook een toestand! Dit is het fameuze [onzekerheidsprincipe](#) (van Heisenberg). Als bijvoorbeeld $|A\rangle$ een deeltje op locatie A voorstelt en $|B\rangle$ een deeltje op locatie B , dan stelt de som $|A\rangle + |B\rangle$ de toestand voor waarbij het deeltje zich met 50% kans op locatie A bevindt en met 50% kans op locatie B . (Normaal gezien is de discreetheid het gevolg van het bestaan van een aftelbare basis voor elke vectorruimte, maar sommige wiskundigen durven ook wel eens met ‘continue’ basissen te werken. Gelukkig gaan wij daar geen rekening mee houden.)

Op deze toestandsvectoren willen we natuurlijk ook operaties definiëren, anders is het leven maar saai. Een goede functie respecteert de structuur van de verzameling waar hij op inwerkt, dus hier zullen we functies moeten beschouwen die de vectorstructuur bewaren. In tegenstelling tot de functies in de voorgaande hoofdstukken die voornamelijk glad waren, zullen we in de kwantummechanica enkel rekenen met lineaire functies,

of lineaire operatoren zoals ze ook wel genoemd worden. Dit betekent dus dat een operatie \widehat{O} in de kwantummechanica aan de volgende vergelijking voldoet:

$$\widehat{O}(\lambda|\psi\rangle + |\varphi\rangle) = \lambda\widehat{O}|\psi\rangle + \widehat{O}|\varphi\rangle.$$

Doorheen dit boek zijn we wel al enkele voorbeelden van lineaire operatoren tegengekomen: afgeleiden, Jacobianen, connecties, krommingstensors, ... Maar hoe kunnen we deze nu gebruiken om concepten zoals metingen en observaties te beschrijven? In de klassieke fysica is dit vrij vanzelfsprekend. Gegeven een grootheid f , beschreven door een functie van de positie en impuls, wordt een meting van deze grootheid simpelweg gegeven door de waarde van de functie. Maar in de kwantummechanica zitten we met vectoren en lineaire operatoren, wat moeten we hiermee aanvangen?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden, moeten we meer weten over hoe de informatie over een systeem zit opgeslagen in de toestandsvector $|\psi\rangle$. Kwantummechanica is berucht om zijn gebrek aan deterministische voorspellingen, alles berust op kansverdelingen. Die kansverdelingen zitten echter op een nogal gekke manier verwerkt in $|\psi\rangle$. Laten we voor het gemak een systeem met twee mogelijke toestanden beschouwen (zoals de *spin* van een elektron). Dat wil zeggen, de toestandsvector is een element van een tweedimensionale vectorruimte:

$$|\psi\rangle = \lambda_1|\uparrow\rangle + \lambda_2|\downarrow\rangle.$$

De coëfficiënten zijn gerelateerd aan de kans dat we ons systeem in de bijhorende toestand kunnen terugvinden, maar ze zijn er niet exact gelijk aan. De coëfficiënten in een lineaire combinatie van vectoren kunnen negatief zijn en kansen zijn nooit of te nimmer negatief. De [regel van Born](#) zegt dat de kansen niet gegeven worden door de coëfficiënten, maar door hun 'kwadraat': $P_1 = |\lambda_1|^2$ en $P_2 = |\lambda_2|^2$. Voor continue systemen, waar we een golf functie $\psi(x)$ hebben, zegt deze regel dat de kans dat je een deeltje op positie x waarneemt, gegeven wordt door $|\psi(x)|^2$. Eigenlijk bereken je hier een soort inproduct zoals gedefinieerd in Hoofdstuk 2, waarbij de

ene vector de fysische toestand beschrijft en de andere vector de mogelijke observatie beschrijft (meestal is dit een geschikte basisvector).

Beschouw dus een systeem beschreven door de toestandsvector $|\psi\rangle$ waarvoor we de grootte horende bij de operator \widehat{O} willen meten. Als we met deze operator inwerken op de toestandsvector, zal het resultaat in het algemeen een andere vector zijn. We lijken dus de toestand te veranderen door een meting uit te voeren! (Dit is trouwens de oorzaak achter alle paradoxale uitspraken over het vreemde karakter van de kwantummechanica.) Maar wat indien we het volgende resultaat krijgen

$$\widehat{O}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle?$$

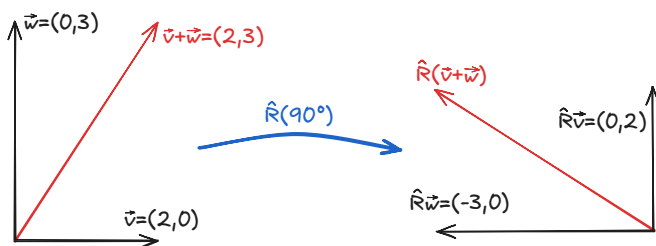
In dit geval is onze toestand niet veranderd, de operator beeldt de vector af op zichzelf. Een dergelijke vector wordt ook wel een **eigenvector** van de operator genoemd. Bovendien bekommen we hier ook een waarde voor de meting van de grootte \widehat{O} , het (reële) getal λ dat we **eigenwaarde** noemen. De axioma's van de kwantummechanica zeggen nu dat dit exact is hoe metingen moeten beschreven worden. Het resultaat van een meting of observatie is altijd een eigenvector van de bijhorende operator en de waarde van de meting komt overeen met de bijhorende eigenwaarde. Merk ook op dat dit betekent dat twee identieke metingen na elkaar exact hetzelfde resultaat zullen geven. Enkel wanneer je metingen afwisselt, kan je de soms zeer mysterieuze eigenschappen van de kwantummechanica observeren. Goede voorbeelden hiervan zijn de vele varianten op het *tweespletenexperiment* of het *Stern–Gerlachexperiment*. Als je bijvoorbeeld de *spin* van een elektron eerst in de x -richting meet, dan in de y -richting en uiteindelijk terug in de x -richting, dan zullen de eerste en laatste meting niet noodzakelijk gelijk zijn.

Dit is misschien ook het geschikte moment om de notaties uit dit boek wat te verenigen. Neem een lineaire operator \widehat{O} en een basis voor onze vectorruimte $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Voor elke geschikte operator kan je zelfs een basis van eigenvectoren vinden. Een belangrijk onderdeel van het oplossen van een kwantummechanisch probleem is het (proberen) zoeken van gemeenschappelijke eigenvectoren van alle relevante operatoren. In de praktijk is

dit echter niet altijd mogelijk en moeten we soms benaderende technieken gebruiken. Wegens de eigenschappen van een basis kunnen we het resultaat van onze operator opnieuw uitdrukken in termen van diezelfde basis:

$$\widehat{O}\vec{v}_i = \sum_{j=1}^n O_i^j \vec{v}_j \quad \text{met} \quad \widehat{O} = \begin{pmatrix} O_1^1 & \cdots & O_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_n^1 & \cdots & O_n^n \end{pmatrix}.$$

voor geschikte coëfficiënten O_i^j die net zoals bij de Jacobiaan een matrix vormen. Heisenberg had trouwens oorspronkelijk zijn versie van de kwantummechanica uitgewerkt aan de hand van dergelijke tabellen. Pas toen men doorhad dat al die getallen neerkwamen op lineaire operatoren kon het echte werk beginnen. De taak van een (kwantum)fysicus bestaat er in zekere zin uit de gepaste matrix te vinden die een gegeven fysische observable moet voorstellen. Wat is bijvoorbeeld de matrix voor de energie-operator? Of voor de impuls?



Figuur 4.1: Roteren van vectoren.

Laat ons als voorbeeld eens een rotatie beschouwen. In de figuur hierboven zie je een rotatie over 90° (tegen de klok in). Als oefening kan je eens nagaan dat de gerooteerde vector $\widehat{R}(\vec{v} + \vec{w})$ wel degelijk gelijk is aan de som van de gerooteerde vectoren $\widehat{R}(\vec{v})$ en $\widehat{R}(\vec{w})$. Bovendien kan je hier ook de bijhorende matrix op de figuur afleiden:

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Figuur 4.2: Actie van de rotatiematrix.

De nieuwe x -component is gelijk aan nul keer de oude x -component min één keer de oude y -component en de nieuwe y -component is gelijk aan één keer de oude x -component plus nul keer de oude y -component. (Voor algemene rotaties heb je sinussen en cosinussen nodig. «*Probeer de algemene uitdrukking eens te vinden om de wiskundegoden gelukkig te stemmen.*»)

Ook al zullen wij ons niet onmiddellijk bezig houden met dergelijke praktische vragen, toch zullen we wat dieper ingaan op een van deze operatoren. Want hoe kunnen we nu eigenlijk iets voorspellen in de kwantummechanica? We hebben tot nu toe eigenlijk enkel gezegd welk soort wiskundige objecten er bestaan in deze theorie. We hebben structuur en kinematica, maar geen dynamica zoals de tweede wet van Newton in de klassieke mechanica. Hier doet Dirac zijn intrede. Hij had het volgende idee voor ogen. Neem een klassieke theorie zoals beschreven door de wetten van Newton en vervang functies door operatoren: $f \rightarrow \hat{f}$. Om dit te bewerkstelligen, vertrekken we vanuit de formulering van de klassieke mechanica van Poisson. We hebben dan niet enkel functies om te 'kwantiseren', we hebben ook het Poissonhaakje. Dirac had ook door dat dit haakje $\{f, g\}$ verdacht goed lijkt op de commutator $[f, g]$, dus waarom relateren we die niet aan elkaar? Als we vertrekken van de klassieke evolutievergelijking

$$\dot{f} = \{f, H\},$$

dan zou de kwantummechanische evolutievergelijking er (ongeveer) als volgt moeten uitzien:

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = [\hat{f}, \hat{H}].$$

Het blijkt nu dat dit niet volledig correct is. De natuur wil dat we hier nog

een constante (of twee) aan toevoegen:

$$i\hbar \frac{d\hat{f}}{dt} = [\hat{f}, \hat{H}].$$

Aanschouw de [Schrödingervergelijking](#) (al is deze versie door Heisenberg niet de bekendste variant). Door één simpele substitutie hebben we de meest fundamentele vergelijking van de kwantummechanica uit de klassieke mechanica kunnen afleiden. Die twee constanten i en \hbar zullen trouwens in zo goed als elke formule in dit hoofdstuk voorkomen.

De imaginaire eenheid i is iets zuiver wiskundig. Dit is het [complexe getal](#) met de eigenschap dat zijn kwadraat gelijk is aan -1 :

$$i^2 = -1.$$

Wiskundigen hebben die complexe getallen net ingevoerd om vierkantswortels van negatieve getallen te kunnen beschrijven. Dat kwantummechanica schijnbaar niet zonder complexe getallen te beschrijven valt, is een heel opmerkelijk (en niet volledig begrepen) feit. Een mogelijke argument hiervoor is dat alles in de kwantummechanica zich als een golf gedraagt en golven zijn nu eenmaal het eenvoudigst te beschrijven met complexe getallen. Om de regel van Born te laten werken met complexe getallen moeten we ook het kwadraat (of de absolute waarde) van een complex getal $z \equiv a + bi$ definiëren:

$$|z|^2 = \bar{z}z = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2,$$

waar de [complexe toevoeging](#) $\overline{a + bi} := a - bi$ zijn intrede deed.

De fysische grootte h , de (gereduceerde) [constante van Planck](#), duikt ook op door de relatie met golven. Deze constante geeft het verband tussen de impuls van een deeltje en zijn kwantummechanische golflengte, zoals we later in dit hoofdstuk zullen bespreken. De rol die de lichtsnelheid in de speciale relativiteitstheorie speelt, wordt door de constante van

Planck in de kwantummechanica gespeeld. Dit kunnen we trouwens hard maken want de klassieke mechanica is een benadering (zowel fysisch als wiskundig) van de speciale relativiteitstheorie wanneer $c \rightarrow +\infty$ en een benadering van de kwantummechanica wanneer $\hbar \rightarrow 0$. Experts spreken hier van een [İnönü–Wignercontractie](#). Deze relateert algebraïsche structuren door een parameter te laten ‘verdwijnen’ of ‘vervormen’. Voor de speciale relativiteitstheorie gaat het om de symmetriegroepen uit de Kleinmeetkunde (zie vorig hoofdstuk), de Poincarégroep en de Galileigroep. Voor kwantummechanica gaat het exact over de relatie tussen de commutator en het Poissonhaakje zoals we later in dit hoofdstuk gaan zien.

Naast de Schrödingervergelijking kunnen we nog een andere interessante eigenschap van de kwantummechanica bekommen. Laten we eens het fundamentele Poissonhaakje van een coördinaat en een component van de impuls berekenen:

$$\{q^i, p_j\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q^k} \frac{\partial q^i}{\partial p_k} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

Door middel van de kettingregel volstaat deze formule om alle andere Poissonhaakjes in de klassieke mechanica uit te rekenen. Volgens Dirac wordt deze formule in de kwantummechanica als volgt vertaald:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Dit zegt dat als we eerst de positie meten en dan de impuls dit een ander resultaat geeft dan eerst de impuls te meten en dan de positie. We hebben het [onzekerheidsprincipe van Heisenberg](#) in kwantitatieve vorm gevonden! Ook al is dit een kwantummechanisch verschijnsel pur sang, het zit in zekere zin eigenlijk al verstopt in de klassieke mechanica.

De belangrijkste vraag blijft echter nog steeds wat de juiste keuze van toestanden $|\psi\rangle$ of observabelen \hat{O} is. Want uiteindelijk is de klassieke mechanica een benadering van de kwantummechanica en niet omgekeerd. Kunnen we überhaupt verwachten dat er een sluitende of zelfs unieke manier bestaat om kwantum uit klassiek te halen? Het antwoord op deze

vraag is in het algemeen nog steeds onzeker. Fysici en wiskundigen hebben nog steeds geen algemene kwantisatieprocedure ontdekt. Op dit moment zijn er twee veelbelovende strategieën om dit probleem te onderzoeken: de algebraïsche, die focust op de observabelen, en de meetkundige, die focust op de toestanden. In het vervolg van dit hoofdstuk zullen we deze in wat meer detail bespreken. Het merendeel van wat nog komt kan eigenlijk gezien worden als een noodzakelijke extra, de uitleg wordt wat technischer. Desondanks is de inhoud bijzonder relevant voor wat nog komen moet in dit boek. Als je je zou afvragen of er een alternatief is waarbij we niet vanuit de klassieke mechanica zouden vertrekken, het antwoord is een ja, maar dan be je genooddaakt om de vorm van de operatoren en toestandsvectoren te ‘gokken’. Dit is bijvoorbeeld perfect haalbaar voor discrete systemen zoals kristallen. Het gekendste voorbeeld hier van is het *Isingmodel* waarbij men een *spin* op elk punt van het kristalrooster plaatst.

Als eerste behandelen we de algebraïsche aanpak tot kwantisatie, de zogenaamde **deformatiekwantisatie**. Dit is een geleerd woord om te zeggen dat we de klassieke mechanica kwantiseren door de bestaande structuur te deformeren, vervormen dus. Maar welke structuur is dit dan? Exact degene die Dirac ook vervormde, de algebra van klassieke functies met hun Poissonhaakje. Klassiek hebben we de verzameling $C^\infty(M)$ van gladde functies op een al dan niet gekromde variëteit M uitgerust met de puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{en} \quad (fg)(x) := f(x)g(x).$$

De deformatiekwantisatie wil nu dat we zowel de objecten, de gladde functies, als de operaties, vermenigvuldiging in dit geval, gaan vervormen:

$$f \longrightarrow \hat{f} := f + f_1\hbar + f_2\hbar^2 + \dots$$

en

$$fg \longrightarrow \hat{f} * \hat{g} := fg + B_1(f, g)\hbar + B_2(f, g)\hbar^2 + \dots$$

We voegen als het ware kwantumeffecten (termen in \hbar) toe aan de klassieke mechanica. De commutator in de voorgaande formules wordt dan

gegeven door het [Moyalhaakje](#)

$$[\hat{f}, \hat{g}]_* := \hat{f} * \hat{g} - \hat{g} * \hat{f}$$

en de Diracprocedure wordt

$$i\hbar\{\widehat{f}, \widehat{g}\} = [\hat{f}, \hat{g}]_* .$$

Deze aanpak heeft al tot enkele grote wiskundige doorbraken geleid, maar spijtig genoeg heeft hij ook enkele grote problemen:

- Oneindige sommen zijn moeilijk te beheersen. Ook al is elke term zelf eindig, de som heeft vaak de neiging om oneindig groot te worden, denk bijvoorbeeld aan de Ramanujanreeks

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots .$$

In het algemeen zal deze procedure dus enkel een fysisch betekenisvol resultaat geven wanneer $\hbar = 0$, wat de echte kwantummechanica dus zou uitsluiten.

- We starten met een klassieke uitdrukking waar we met mondjesmaat kwantumeffecten aan toevoegen: eerst van de orde \hbar , dan van de orde \hbar^2 , ... Dit is wat men [storingsrekening](#) noemt aangezien je een klassiek resultaat verstoort met kleine effecten. Ook al is dit in de praktijk vaak een goede aanpak, toch is het geweten dat bepaalde effecten in de kwantummechanica onmogelijk via storingsrekening kunnen bekomen worden. Niet alle fenomenen hebben een klassieke tegenhanger.

Doch heeft deze algebraïsche aanpak een zekere aantrekkingskracht, zeker voor de aanhangers van het operationalisme zoals Einstein [6]. In deze filosofische strekking krijgt een concept pas betekenis wanneer je het kan meten of ten minste kan specificeren hoe het te meten. Een golf functie is voor mensen zoals Einstein enkel een wiskundige truc, in tegenstelling tot

grootheden zoals energie en massa. Het geeft ook sneller aanleiding tot een definitie die we kunnen omzetten in een werkbaar experiment.

Naast de algebraïsche aanpak is er ook de meetkundige. Door de sterke relatie met zowel het vorige als de volgende hoofdstukken zullen we hier wat meer aandacht aan besteden. Naast geschikte operatoren om de Diracprocedure te implementeren, zullen we ook naar geschikte ‘golffuncties’ op zoeken, en om dit te verwezenlijken, gaan we deze keer vanuit de Hamiltoniaanse mechanica vertrekken. Het lijkt trouwens misschien alsof we opvallend vaak de Hamiltoniaanse/Poissonmechanica gebruiken en de Lagrangiaanse mechanica negeren. Deze heeft echter zeker ook zijn nut, maar het is dan eerder in de veldentheorie uit het volgende hoofdstuk. De legendarische *padintegraalmethode* van Feynman maakt hier bijvoorbeeld gebruik van, al valt deze notoir moeilijk wiskundig hard te maken. *Integralen* over oneindig-dimensionale ruimtes vallen moeilijk te definiëren.

Op school zien we snelheid en dus ook impuls als een afgeleide grootte van de positie. De bewegingsvergelijkingen laten ons dan toe, gegeven een initiële waarde voor zowel positie als impuls, een pad doorheen de ruimte vast te leggen. We kunnen dit echter ook anders bekijken. In plaats van de drie (of n) componenten van de positie als coördinaten te nemen, kunnen we de zes (of $2n$) componenten van de positie en de impuls als coördinaten nemen. De bewegingsvergelijkingen geven nog steeds een pad doorheen deze nieuwe ruimte, maar we krijgen de extra vrijheid om positie en impuls als onafhankelijke grootheden te zien. De fysische paden worden dan van de ‘onfysische’ gescheiden door de ‘extra’ vergelijkingen

$$p_i = \frac{d(mq^i)}{dt},$$

zo wordt de definitie van impuls omgetoverd tot een extra bewegingsvergelijking. Deze $2n$ -dimensionale ruimte, een een variëteit zelfs, wordt de **faseruimte** genoemd.

Wat we nu willen doen is de Hamiltoniaanse tijdsevolutie beschrijven als de stroming van een geschikt vectorveld (zie de extra’s bij het vorige

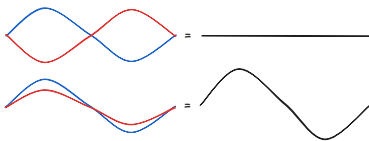
hoofdstuk):

$$X^H(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t).$$

We willen ons als het ware late meedrijven op de stroming van de tijd. Gelukkig is dit niet zo heel erg moeilijk. Herinner je je nog de eigenschappen van het Poissonhaakje? Het is lineair en voldoet aan de Leibnizregel (in beide argumenten), net zoals een vectorveld. We nemen dus simpelweg

$$X^H(f) := \{f, H\}$$

als definitie van het [Hamiltoniaanse vectorveld](#). De definitie van stroming geeft dan exact de Hamiltoniaanse bewegingsvergelijkingen! Als we even een stap achteruit zetten en kijken naar wat we net gedaan hebben, dan zien we dat we zoals gebruikelijk enkel de notatie wat veranderd hebben en de formules herschreven hebben. Het essentiële punt is echter hoe we alles herschreven hebben. Onze bewegingsvergelijkingen zijn nu volledig in meetkundige termen uitgedrukt. We zijn niet meer afhankelijk van coördinaten zoals in Hoofdstuk 2 en we kunnen onze vergelijkingen uitbreiden naar om het even welke variëteit waar we een Poissonhaakje kunnen definiëren, de zogenaamde [symplectische variëteiten](#) om nog wat moeilijke woorden te gebruiken. We kunnen nu dus werken op bollen, donuts of zelfs het hele universum, en hebben bovendien een hele hoop technieken, zowel theoretisch als numeriek, tot onze beschikking aangezien het concept stroming uitermate goed bestudeerd is.



Figuur 4.3: Interferentie van twee golven.

Laat ons echter niet te ver afdwalen, we zijn hier gekomen om te kwantiseren. Om te zien hoe een meetkundige formulering zoals in voorgaande paragraaf ons hierbij kan helpen, zullen we nog eens plaats moeten nemen achter de schoolbanken en wat intuïtie opdoen in de les-

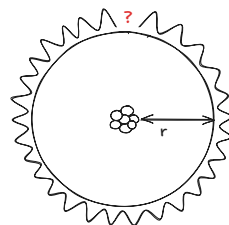
sen over de trillende snaar. Een belangrijk resultaat daarbij is dat een

staande golf, zoals die in een vioolsnaar of orgelpijp, enkel kan bestaan als de lengte van de snaar of pijp overeenkomt met een geheel aantal keer de halve golflengte van de golf. De golven of golflengtes die hieraan voldoen, staan ook wel gekend als harmonieken. De reden voor dit verband is [interferentie](#). Twee golven die elkaar tegenkomen, zullen elkaar proberen versterken of uitdoven. De ‘uitwijking’ van de twee golven op een positie moet worden opgeteld. Een eenvoudig voorbeeld is te zien in de figuur op de vorige pagina. In het bovenste interferentiepatroon is de uitwijking van de rode golf tegengesteld aan die van de blauwe golf, ze heffen elkaar op en er is dus eigenlijk geen resulterende golf (een triviale golf in wiskundige taal). In het onderste patroon zijn de twee golven in fase, dat wil zeggen dat op elk punt het teken van de uitwijking gelijk is. In dit geval versterken de golven elkaar.

Bij het intreden van de 20^e eeuw kwam Einstein met het idee op de proppen dat licht zowel een deeltjes- als een golfkarakter had.¹ Dit lag aan de basis van de kwantumrevolutie. Hertog de Broglie deed hier nog een schepje bovenop door te stellen dat dit ook voor materie geldt. De golflengte van een deeltje met impuls p wordt gegeven door zijn [de Brogliegolflengte](#)

$$\lambda = 2\pi \frac{h}{p}.$$

Nu gaan we een analogie uit de ‘oude kwantumtheorie’ van Bohr en kompanen gebruiken om deze materiegolven aan trillende snaren te relateren. Deze analogie is fysisch eigenlijk (volkomen) fout, maar geeft wel een bruikbaar inzicht. Er bestaat uiteraard een correcte, wiskundige afleiding, maar deze is bijzonder technisch en draagt niet echt bij aan de intuïtie (de *Wentzel–Kramers–Brillouinmethode*). Ze geeft echter wel een correctie op het hier verkregen resultaat die ook in



Figuur 4.4: Elektron rond de kern.

¹Planck had reeds eerder het concept van energiekwanta ingevoerd om de singulariteiten in *zwarte stralers* op te lossen. Voor hem was dit echter enkel een wiskundig of statistisch hulpmiddel. Einstein was degene die dit idee durfde door te trekken naar de realiteit.

de praktijk wordt waargenomen.

Beschouw een elektron dat rond de kern van een atoom draait. Aangezien de (materie)golf langsheen een cirkelvormig pad beweegt, zal constructieve interferentie enkel optreden wanneer de omtrek van de cirkel gelijk is aan een geheel aantal keer de golflengte van de golf. De golf eindigt waar hij begint en we willen natuurlijk dat het begin en einde in fase zijn, anders zou het elektron zichzelf annihileren! We krijgen dus de volgende voorwaarde ($n \in \mathbb{N}$):

$$2\pi r = \left(2\pi \frac{\hbar}{p}\right)n \iff pr = n\hbar.$$

De **Bohr-Sommerfeld kwantisatievoorwaarde** uit de oude kwantumtheorie laat onder meer toe om de 'fijnstructuur' van het waterstofatoom te beschrijven, de subtiële structuur die wordt waargenomen in de emissie- en absorptiespectra van waterstof.

Deze voorwaarde heeft echter ook diepe gevolgen voor de meetkunde van de faseruimte die we willen kwantiseren. De Diracprocedure zegt dat we met elke functie f op de faseruimte van een klassiek systeem een operator \hat{f} op het kwantumsysteem moeten associëren zodat aan de volgende eigenschap voldaan is:

$$i\hbar\{\widehat{f}, \widehat{g}\} = [\hat{f}, \hat{g}].$$

Laten we eens proberen te vertrekken van de keuze $\hat{x} = x$ en $\hat{p}_x := -i\hbar\partial_x$. «Het is een leuke oefening om aan te tonen dat deze keuze aan de relatie voldoet.» Deze keuze wordt ook wel de **configuratierepresentatie** van de kwantummechanica genoemd. Het is een keuze van operatoren waarin de ruimtelijke coördinaten als fundamenteel gezien worden. Men kan echter ook de duale keuze $\hat{x} = -i\hbar\partial_{p_x}$ en $\hat{p}_x = p_x$ gebruiken. Deze representaties zijn aan elkaar gerelateerd door een zogenaamde *Fouriertransformatie*, een van de favoriete methodes van ingenieurs.

We zullen zelfs nog wat gekker doen en een algemene uitdrukking opschrijven die bovenstaande formules voor zowel \hat{x} als \hat{p}_x impliceert:

$$\hat{f} := -i\hbar D_{X^f} + f,$$

waar X^f het Hamiltoniaanse vectorveld voorstelt in het geval dat f de Hamiltoniaan zou zijn. D is hier een operator die afhangt van het vectorveld X^f en zich gedraagt als een soort afgeleide (lineariteit en Leibnizregel). Met wat geduld kan je aantonen dat deze eigenschappen toelaten om de Diracvoorwaarde als volgt te herschrijven:

$$\{f, g\} = -i\hbar([D_{X^f}, D_{X^g}] - D_{[X^f, X^g]}).$$

Een vrij complexe en intimiderende vergelijking, maar kennen we dat rechterlid niet ergens van? Op de factor na is het rechterlid gelijk aan, of toch minstens lijkend op, de kromming uit voorgaand hoofdstuk! Om een goede kwantisatie te hebben, zou ons Poissonhaakje overeen moeten komen met de kromming op een of andere ruimte. In tegenstelling tot in de algemene relativiteitstheorie zal het hier echter niet gaan om ons universum, maar om een soort interne ruimte. We zien dus ook dat de operator D overeenkomt met de covariante afgeleide op die interne ruimte zijn, vandaar dat hij een vectorveld als argument meekrijgt.

Nu komt uiteraard de vraag of, en indien ja, hoe we zo een interne ruimte kunnen construeren. Raar maar waar, dit is exact waar de Bohr-Sommerfeldvoorwaarde opnieuw opduikt. Slimme wiskundigen hebben ooit aangetoond dat men een geschikte ruimte kan vinden waarvoor de kromming overeenkomt met het Poissonhaakje uit de klassieke mechanica als en slechts als aan die kwantisatievoorwaarde voldaan is. Dit is trouwens een meer algemene levenswijsheid. Kwantisatievoorwaarden en [kwantum anomalieën](#), afwijkingen ten opzichte van de klassieke theorie, zijn vaak (of zelfs altijd) gerelateerd aan meetkundige obstructies.

Klassiek	Kwantum
faseruimte M	vectorruimte \mathcal{H}
coördinaten (q, p)	toestandsvectoren $ \psi\rangle$
functies $f(q, p)$	operatoren \hat{f}
Newton: $\dot{f} = \{f, H\}$	Schrödinger: $i\hbar \frac{d\hat{f}}{dt} = [\hat{f}, \hat{H}]$

Extra's

Voor we wat dieper ingaan op de twee kwantisatieprocedures uit die hoofdstuk gaan we eerst nog eens naar een stukje algebra kijken. We hebben ondertussen twee producten van vectoren gezien. Enerzijds het inproduct dat twee vectoren uit eenzelfde vectorruimte afbeeldt op een reëel getal en anderzijds het uitwendig product dat twee (driedimensionele) vectoren neemt en afbeeldt op een derde vector uit dezelfde (driedimensionele) vectorruimte. Maar is er ook een mogelijkheid om het product van twee verschillende vectorruimtes te nemen, zoals het Cartesiaans product

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

van twee gewone verzamelingen. Dit is de verzameling van koppels waarbij het ene element behoort tot de eerste verzameling en het tweede element tot de tweede verzameling. Op deze manier bekom je bijvoorbeeld het vlak als het (Cartesiaans) product van twee rechten: $\mathbb{r}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Het product van twee verschillende ruimtes treedt op in de kwantummechanica wanneer we twee verschillende fysische systemen willen combineren. Neem bijvoorbeeld de ruimte \mathcal{H}_1 van kwantumtoestanden voor een elektron dat doorheen de ruimte vliegt. Hoe kunnen we twee kopieën van \mathcal{H}_1 combineren om de situatie met twee elektronen te beschrijven? Het Cartesiaans product $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$ kan ons hier niet helpen, want het is niet lineair. Als het Cartesiaanse product lineair was, dan zouden de volgende twee procedures equivalent zijn:

1. Eerst een vector scalair vermenigvuldigen en dan het product met een tweede vector nemen: $\vec{v} \rightarrow \lambda\vec{v} \rightarrow (\lambda\vec{v}, \vec{w})$.
2. Eerst het product van de twee vectoren nemen en dan scalair vermenigvuldigen: $\vec{v} \rightarrow (\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \lambda(\vec{v}, \vec{w})$.

Maar deze laatste is gelijk aan $(\lambda\vec{v}, \lambda w)$. Denk bijvoorbeeld aan de scalaire vermenigvuldiging van vectoren in \mathbb{R}^2 (herinner je Figuur 2.3): $2 \cdot (1, 1) = (2, 2)$. We moeten dus op zoek naar een andere oplossing. Het juiste product wordt het **tensorproduct** genoemd. (We komen het woord 'tensor'

nog tegen in het volgende hoofdstuk, maar dan onder een schijnbaar andere vorm.) Dit product is volledig gedefinieerd door middel van lineariteit:

$$\lambda(\vec{v} \otimes \vec{w}) := \lambda\vec{v} \otimes \vec{w} = \vec{v} \otimes \lambda\vec{w}.$$

Dit houdt bijvoorbeeld in dat we, in tegenstelling tot bij het Cartesiaans product, de componenten niet paarsgewijs mogen optellen:

$$\vec{v} \otimes \vec{w} + \vec{v}' \otimes \vec{w}' \neq (\vec{v} + \vec{v}') \otimes (\vec{w} + \vec{w}').$$

Dit is onder meer de oorsprong van het begrip [verstrengeling](#). In termen van spintoestanden van elektronen krijgen we de volgende uitdrukking:

$$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \neq (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle).$$

In deze vergelijking stelt het rechterlid een onverstrengelde toestand voor. Zowel het ene elektron als het andere kunnen in beide toestanden voorkomen (elk met 50% kans). Het linkerlid daarentegen stelt een (maximaal) verstrengelde toestand voor.² Als je de toestand van het ene elektron kent, ken je automatisch ook die van het andere. Bovendien volgt uit bovenstaande definitie dat de dimensie van het tensorproduct gelijk is aan het product van de dimensies, in tegenstelling tot het Cartesiaans product waarbij het de som van de dimensies is. Dit is dan weer de oorsprong van de 'vloek der dimensionaliteit'. De dimensie van de totale toestandruimte van een kwantummechanisch systeem schaal enorm snel, exponentieel zelfs. Neem de twee-dimensionale ruimte \mathcal{H}_1 . In een stuk materie is het aantal deeltjes van de grootteorde van de constante van Avogadro $\sim 10^{23}$. De totale toestandruimte zou dus $\mathcal{H}_1^{\otimes 10^{23}}$ zijn, welke een dimensie van $2^{10^{23}}$ heeft. Dit is veel, veel meer dan het aantal deeltjes in het universum, dus we kunnen onmogelijk een klassieke computer maken die de golffuncties van een realistisch kwantumsysteem exact kan simuleren.

²Deze maximaal verstrengelde toestanden met twee binaire systemen worden ook wel Belltoestanden genoemd, vernoemd naar John S. Bell en niet Alexander G. Bell (die van de eerste telefoon). Deze specifieke Belltoestand wordt soms ook nog een 'kattoestand' genoemd naar Schrödingers kat.

Kwantummechanica is blijkbaar veel te ingewikkeld voor onze klassieke geesten, dus laten we terugkeren naar de kwantisatie van klassieke systemen en de twee mogelijkheden uit dit hoofdstuk in wat meer detail bekijken. Althans, we zullen voor beide formalismen een interessant aspect verder toelichten. Als eerste is de deformatiekwantisatie aan de beurt en laten we hiervoor even de problemen ermee negeren en doen alsof alles werkt. Zo kunnen we eens kijken hoe we de klassieke mechanica uit de algebra kunnen halen. Hiervoor hebben we de commutator van twee gedeformeerde functies nodig (merk op dat het product in de definitie van de commutator hier ook het gedeformeerde product is):

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f} * \hat{g} - \hat{g} * \hat{f} = (fg + B_1(f, g)\hbar + O(\hbar^2)) - (gf + B_1(g, f)\hbar + O(\hbar^2)).$$

Klassiek commuteren alle functies, de eerste termen uit de haakjes vallen dus al weg. Wat overblijft is minstens van de orde \hbar :

$$[\hat{f}, \hat{g}] = (B_1(f, g) - B_1(g, f))\hbar + O(\hbar^2).$$

Nu, uit de associativiteit van het ster-product $\hat{f} * \hat{g}$ volgt dat de operatie

$$\{f, g\}_* := B_1(f, g) - B_1(g, f)$$

aan dezelfde eigenschappen van het Poissonhaakje voldoet! We vervullen dus echt Dirac zijn droom voor alle waarden van \hbar (op de imaginaire factor i na die we kunnen opsorpen in de andere grootheden):

$$[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar\{f, g\}_*.$$

Ondanks de problemen met deformatiekwantisatie is het wel degelijk een goed idee. Mits wat technische aanpassingen, die we niet zullen toelichten, kan deze methode trouwens om de oneindigheden heen geraken. Sommige lezers zouden zich nu de vraag kunnen stellen of we wel echt die hogere-orde termen $O(\hbar^2)$ nodig hebben en dat is zeker een terechte vraag. Een 'klassiek' resultaat uit de jaren 40 toonde aan dat deze termen noodzakelijk zijn. Er bestaan functies van positie en impuls waarvoor het

Poissonhaakje nul is, maar waarbij na de naïeve Diracprocedure de commutator niet meer nul is. Dit is zo een (kwantum)anomalie.

Voor de meetkundige kwantisatie zullen we wat dieper ingaan op de interne ruimte die we uit de Bohr–Sommerfeldvoorwaarde halen. Deze heeft ook een natuurlijke interpretatie in de kwantummechanica. Kromming en covariante afgeleiden draaien rond het '(parallel) transporteren van vectorvelden, maar hier zijn we op zoek naar een interne vrijheidsgraad van de kwantumtoestanden. Deze vrijheidsgraad zal echter geen echt meetbare grootte zijn. Lang werd zelfs gedacht dat het enkel een wiskundig hulpmiddel was en dus zou moeten kunnen worden vermeden in de beschrijving van de kwantummechanica. Het legendarische *Aharonov–Bohmeffect* toonde echter aan dat de kwantummechanische fase wel degelijk een fysisch relevante, doch onmeetbare grootte is. Uit de regel van Born volgt nu dat we een toestandsvector met -1 mogen vermenigvuldigen zonder het eindresultaat te wijzigen, want $-1 \cdot -1 = 1$. Er is echter meer! Net zoals bij de trillende snaren mogen we een algemene fase invoeren. Dit komt neer op het verschuiven van toppen en dalen van de bijhorende golf, het verandert niets aan de frequentie en amplitude van de golf, het lijkt enkel alsof de golf op een andere plek gestart is. Bij interferentie zijn dergelijke fasen uiteraard wel belangrijk, maar indien we alle golven op dezelfde manier wijzigen, dan is ook hier geen probleem te bespeuren.

Beschouw de volgende analogie. Je kijkt naar de wereldkaart en bedenkt je dat (bijna) elk land zijn eigen munteenheid heeft. Op de grens tussen twee landen hebben we dus nood aan een omzettingstabel. Indien we nu de waarde van één munteenheid plots wijzigen, dan zal dit overal een impact hebben en de wereldeconomie beïnvloeden. Als we echter tegelijkertijd alle munteenheden op eenzelfde manier wijzigen (bijvoorbeeld alles maal twee), dan zal er geen impact zijn, waarbij we even het concept inflatie vergeten en de rol van universele centrale bank spelen.³ Bovendien kunnen we eigenlijk lokaal werken. Als we slechts één munt-

³Er zijn mensen die economie op deze manier hebben proberen vertalen, maar dit heeft tot nu toe geen praktisch nut gehad.

eenheid wijzigen, maar tegelijkertijd ook de omzettingstabellen aan alle grenzen wijzigen, dan lijkt het voor de buitenwereld alsof er niks veranderd is. Dit is waar het parallel transport en de covariante afgeleiden opduiken. De connectie die ons in het voorgaande hoofdstuk vertelde hoe vectoren roteerden als we van één plek naar een andere reisden, zou in onze economische analogie overeenkomen met de omzettingstabellen. De intrinsieke waarde wijzigt niet (de vectoren zijn parallel), maar de eenheid verandert. Voor de kwantummechanica is de eenheid het denkbeeldige nulpunt van de fase en de connectie zegt hoe deze wijzigt (voor alle golf functies) van punt tot punt. Als het referentiepunt voor alle posities hetzelfde is, dan is onze interne ruimte vlak.

De Bohr–Sommerfeldvoorwaarde zegt ons hoe een deeltje tijdens zijn beweging doorheen de ruimte een fase, uitgedrukt in termen van het Poissonhaakje, op een consistente manier kan opbouwen zodat er geen catastrofale interferenties plaatsvinden. Deze relatie tussen klassieke bewegingsvergelijkingen en kwantummechanische fasen ligt trouwens aan de basis van die alternatieve kwantisatiemethode die we reeds aanhaalden, de *padintegraalmethode van Feynman*.

Hoofdstuk 5

Veldentheorie met Yang & Mills

In dit hoofdstuk verlaten we weer even het kwantumrijk, want het klassieke verhaal is op zich al complex genoeg en verre van ten einde. We keren zelfs weer even wat terug in de tijd, naar de 19^e eeuw toen men het elektromagnetisme wist te doorgronden. Eind 18^e, begin 19^e eeuw boekte de fysica enorme vooruitgang in het beschrijven van zowel elektrische als magnetische verschijnselen. Dit culmineerde in het werk van Maxwell waarin hij alle gekende resultaten wist samen te gieten in vier fundamentele vergelijkingen (we gebruiken hier het inproduct en uitwendig product uit Hoofdstuk 2):

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array}$$

Het belang van deze vergelijkingen is niet te onderschatten (ook al zijn de vergelijkingen zoals ze hier staan enkel geldig in het vacuüm, waar er geen

vrije ladingen of elektrische stromen aanwezig zijn). Ze vatten niet enkel de talloze resultaten uit die tijd samen, ze voorspellen bijvoorbeeld ook het bestaan van elektromagnetische straling. Jouw radio en gsm zouden niet mogelijk zijn zonder deze vergelijkingen. Bovendien volgt uit deze vergelijkingen ook dat elektromagnetische golven zich aan de (eindige) lichtsnelheid voortbewegen, licht is een elektromagnetische golf:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} .$$

We kunnen hier onmiddellijk het eerste grote verschil met de eerdere hoofdstukken zien. In de mechanica van deeltjes en objecten bestuderen we hun beweging doorheen de ruimte. Hierbij is hun pad fundamenteel, we hebben voor elk tijdstip de coördinaten $q^i(t)$ en impulsen $p_i(t)$. In de studie van elektromagnetisme hebben we echter niet de coördinaten en impulsen als fundamentele grootheden, maar het elektrische en magnetische veld $\vec{E}(q, t)$ en $\vec{B}(q, t)$. Het zijn functies die niet enkel van de tijd afhangen, maar voor elk punt in de ruimte gedefinieerd zijn, vandaar de naam **veld**. De vraag wordt dus wat de geschikte alternatieven voor de coördinaten (en hun impulsen) zijn om dergelijke problemen op te lossen, want we hebben er nu schijnbaar oneindig veel nodig. Dit is de vraag die we in dit hoofdstuk zullen behandelen. Een klein voorproefje, de kromming die in de vorige twee hoofdstukken reeds opdook, zal hier een centrale rol spelen.

Uit de lessen elektriciteit op school is het concept potentiaal misschien nog gekend. (Zo niet, het is vergelijkbaar met de potentiële energie uit Hoofdstuk 1.) Het fantastische is nu dat de vergelijkingen van Maxwell volledig kunnen worden herschreven in termen van de potentiaal, of potentialen beter gezegd. Het bijzondere is echter dat de elektromagnetische potentialen niet enkel op een constante na bepaald zijn zoals de potentiële energie, er is veel meer vrijheid! Er is zelfs zo veel vrijheid dat bijna elke functie van ruimte en tijd een transformatie van de potentialen geeft die de velden \vec{E} en \vec{B} fysisch onveranderd laat. Met andere woorden, je kan op elke positie een (zo goed als onafhankelijke) transformatie van de potentiaal uitvoeren zonder de fysica te wijzigen. Dit betekent echter niet dat

de waarden van de potentialen volkomen willekeurig zijn, de transformaties hebben nog steeds een heel specifieke vorm ook al vertrekken ze van een willekeurige (gladde) functie. Deze vrijheid helpt ons enerzijds het leven eenvoudiger te maken omdat we er gebruik van kunnen maken om de vergelijkingen in een eenvoudige(re) vorm te schrijven (bijvoorbeeld door potentialen te gebruiken die niet expliciet van de tijd afhangen). Anderzijds impliceert deze vrijheid ook dat er heel wat overbodige informatie in de velden en hun potentialen verstopt zit. In dit hoofdstuk zullen we ons bezighouden met deze structuren beter te begrijpen.

De oefening die elke theoretische fysicus moet hebben gemaakt, is aantonen dat volgende uitdrukkingen voor de elektromagnetische velden voldoen aan de vergelijkingen van Maxwell «*try it*»:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}.\end{aligned}$$

Hierin is V de gekende elektrische potentiaal (die uit de Coulombkracht), maar we hebben ook een nieuw object ingevoerd: de magnetische (vector)potentiaal \vec{A} . Op die vectorpotentiaal na is de eerste vergelijking het analogon van de tweede wet van Newton voor elektriciteit. Als je beide leden vermenigvuldigt met de lading q , dan bekom je de gebruikelijke uitdrukking voor de Lorentzkracht wanneer er geen magnetisch veld aanwezig is:

$$\vec{F}_{\text{elek}} = q\vec{E} = -\vec{\nabla}(qV) = -\nabla U_{\text{elek}}.$$

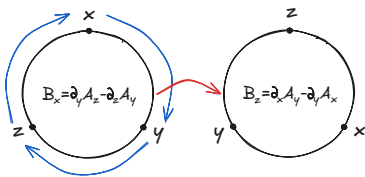
De elektrische potentiaal is dus bijna gelijk aan de elektrische potentiële energie, net zoals bij zwaartekracht. De energie van een massa M_1 in het zwaartekrachtsveld van de massa M_2 is gelijk aan GM_1M_2/r , terwijl de potentiaal van M_2 gelijk is aan GM_2/r . Massa speelt de rol van lading voor de zwaartekracht.

De magnetische potentiaal is, zoals zijn naam doet vermoeden, verantwoordelijk voor het magnetisch veld. In tegenstelling tot zijn elektri-

sche tegenhanger is de magnetische potentiaal een vectoriële grootheid, hij heeft een grootte en een richting (en zin). Dit komt onder meer omdat magnetische velden veroorzaakt worden door bewegende ladingen en beweging wordt beschreven door vectoren. Als dit nogal gek klinkt, denk eens terug aan de lessen magnetisme op school. Er waren drie prototypische voorbeelden van magnetische velden: vaste magneten, stroomdraden en spoelen. Bij die twee laatste wordt het magnetisch veld opgewekt door een stroom die doorheen de draad of spoel loopt, en een stroom bestaat uit niets minder dan bewegende ladingen. Het magnetisme van vaste magneten is echter subtieler en is het gevolg van de 'spin' van subatomaire deeltjes. De spin van elektronen wordt vaak voorgesteld als het ronddraaien van een elektron en ook al geeft dit verband met beweging zo goed als de correcte voorspellingen, de analogie is fysisch absoluut incorrect! (Althans voor zover we weten.)

Ook al is dit schijnbaar weer een inbreuk op onze leuze dat alles zo coördinaatonafhankelijk hoort te zijn, we zullen bovenstaande vergelijkingen even in componenten uitwerken. Dit zal ons in staat stellen om de hele theorie in een volledig meetkundig jasje te steken.

$$\begin{aligned} E_x &= -\partial_x V - \partial_t A_x & B_x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ E_x &= -\partial_y V - \partial_t A_y & B_y &= \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ E_z &= -\partial_z V - \partial_t A_z & B_z &= \partial_x A_y - \partial_y A_x. \end{aligned}$$



Figuur 5.1: Cyclische permutatie.

Als je goed naar deze formules kijkt, is hier misschien wel enige logica in te zien. Aangezien het magnetische veld te schrijven is als een soort uitwendig product, worden de indexen in de twee termen simpelweg omgewisseld en kunnen we de componenten

B_y en B_z uit B_x halen door de indexen $\{x, y, z\}$ te permuteren zoals hier naast grafisch is weergegeven. We kunnen er het elektrische veld trouwens ook bij betrekken als we even wat kennis van de speciale relativitei-

teitstheorie lenen. Einstein heeft ruimte en tijd verenigd, met de tijd als '0^e' dimensie, waardoor we onze gradiënt $\vec{\nabla}$ dus kunnen uitbreiden met de (partiële) tijdsafgeleide: $\vec{\nabla}^{(4)} := (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Op eenzelfde manier kunnen we ook de geünificeerde potentiaal $\vec{A}^{(4)} := (V, -A_x, -A_y, -A_z)$ introduceren, waar de mintekens ons het leven makkelijker maken aangezien we de volgende uitdrukking voor het elektrische veld krijgen:

$$E_i = -\partial_i A_0 - \partial_0 A_i.$$

Het elektrische veld heeft dan toch de structuur van het magnetische veld, maar er zijn verschillen. Beide termen hebben hetzelfde teken, in tegenstelling tot in het uitwendig product, en bovendien hadden we toch gezegd dat het uitwendig product enkel in drie dimensies te definiëren viel? (Om helemaal correct te zijn, moeten we eigenlijk zeggen dat het enkel in drie en zeven dimensies bestaat, maar in zeven dimensies heeft het minder interessante eigenschappen.) Dit heeft een vrij voor de hand liggende reden, een die ook verklaart waarom de velden \vec{E} en \vec{B} op het eerste gezicht zo verschillend leken en we beter in lokale coördinaten konden werken: Vectorcalculus is niet de juiste taal om deze fenomenen in te beschrijven!

De uitdrukkingen voor de velden in termen van de potentialen bevatten twee indices, dus laat ons ook een object met twee indices definiëren:

$$\begin{aligned} F_{0i} &:= E_i = -\partial_i A_0 - \partial_0 A_i \\ F_{ij} &:= -B_k = -\partial_i A_j + \partial_j A_i \quad \text{waar } i \neq j \neq k \neq 0. \end{aligned}$$

Op deze manier krijgen we een matrixachtig object:

$$F := \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Het elektrische en magnetische veld zijn twee gezichten van een en dezelfde entiteit: de **elektromagnetische veldsterkte** F . (Wat een naam...) In de speciale relativiteitstheorie is het onderscheid tussen de twee velden

zelfs nog minder duidelijk. Afhankelijk van de snelheid van de waarnemer wordt een deel van het elektrische veld omgezet in een magnetisch veld (en omgekeerd). De veldsterkte gebruiken zorgt ervoor dat je hier absoluut geen zorgen moet over maken. De zogenaamde *Lorentztransformaties* die je toelaten om tussen de referentiekaders van twee bewegende waarnemers te wisselen, werken niet enkel voor vectoren maar ook voor objecten met twee of meer indices.

Maar die twee indices, wat stellen die nu eigenlijk voor? Vectoren hebben één index, waarmee je aangeeft naar welke component je kijkt. Dus de veldsterkte is zeker geen gewone vector. Om dit object beter te begrijpen, keren we even terug naar vorig hoofdstuk en (her)beleven we een van de moeilijk(st)e momenten waar elke fysicus zich doorheen moet slaan.¹ Wanneer iemand de opleiding tot fysicus start, komt hij heel snel vectoren tegen, je hebt ze immers overal nodig. Ze rekenen vlot en je kent ze al wat uit het middelbaar, dus dit is geen echt probleem. Maar al vrij snel komen er ook nog grotere broertjes en zusjes bij, die verduivelde **tensoren**. Gebruikelijk gaat de persoonlijke evolutie als volgt:

1. Je denkt dat tensoren gewoon zoals vectoren of matrices zijn, alleen (eventueel) met meer dimensies. Vectoren zijn simpelweg die tensoren met slechts één index en matrices die met twee indices. Deze objecten lijken uitsluitend in de wereld van de lineaire algebra te leven. (Voor de lezers van de extra's: dit is de relatie met het tensorproduct uit het vorige hoofdstuk.)
2. Kort daarna komt een professor (of een slechte vriend) jouw wereldbeeld aan diggelen slaan door tensoren te definiëren als die objecten die “transformeren zoals een tensor”, anders kan je ze niet gebruiken in de relativiteitstheorie. Grote verwarring en frustratie volgen, want dit is toch een pure cirkelredenering?
3. Met wat goede moed lees je enkele boeken, waarbij je de nodige meetkundige inzichten vergaart om te begrijpen wat een tensor echt voorstelt.

¹Zij die dit zouden ontkennen, moet je niet te snel geloven.

4. Je leest echter iets te veel wiskundeboeken en valt in het zwarte gat der abstractie met als gevolg dat je beseft dat “een tensor is iets dat transformeert als een tensor” de perfecte definitie is!

In de bespreking van tensoren zullen we er echter voor zorgen dat de verwarring minimaal blijft en onmiddellijk overgaan naar de laatste stap. Twee hoofdstukken geleden zagen we dat vectorvelden transformeren aan de hand van de Jacobiaan wanneer we overgaan van één (lokaal) coördinatenstelsel naar een ander. Het laatste puntje in de bovenstaande lijst zegt ons nu dat dit ook gewoon de definitie van een vectorveld zou moeten zijn: iets dat transformeert aan de hand van de Jacobiaan. Maar wat als we nu eens kijken naar een andere transformatieregel, zoals de ‘omgekeerde Jacobiaan’

$$J^{-1}(g_{UV})^j_i = \frac{\partial g^j_{VU}}{\partial y^i} ?$$

Om te begrijpen waarom we hier over de inverse Jacobiaan spreken, vermenigvuldig deze uitdrukking eens met die voor de gewone Jacobiaan en pas de kettingregel toe:

$$\sum_{k=1}^n J(g_{UV})^k_i J^{-1}(g_{UV})^j_k = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

Eerst transformeren met de Jacobiaan en dan met zijn inverse is gelijk aan niets doen. Dit is trouwens de algemene algebraïsche definitie van de [inverse](#) van een matrix. Niemand kan ons nu nog tegenhouden om de omgekeerde transformatieregel te gebruiken. Het is bovendien zelfs een heel goede keuze want je bekomt er fundamentele meetkundige objecten mee: [differentiaalvormen](#).

Neem een vectorveld X en een differentiaalvorm ω , het ene transformeert met de Jacobiaan en het andere met de omgekeerde Jacobiaan. Als we deze objecten combineren, vermenigvuldigen in zekere zin, dan transformeert het resultaat op een triviale manier, want de Jacobiaan en zijn omgekeerde heffen elkaar op. Dat de combinatie $\omega(X)$ transformeert als

een gewone functie wordt vaak op een abstractere manier verwoord door te zeggen dat vectorvelden en differentiaalvormen **duale objecten** zijn, ze eten elkaar als het ware op.

Meer algemeen kunnen we meetkundige objecten definiëren door hun transformatieregels. Bij de overgang van de (lokale) kaart V naar de (lokale) kaart U bekomen we een transformatie g_{UV} die aan twee essentiële voorwaarden moet (of zal) voldoen:

- De omgekeerde transformatie van U naar V wordt gegeven door de inverse: $g_{VU} = g_{UV}^{-1}$.
- De transformaties zijn associatief. Je kan van U naar V en dan van V naar W gaan, of je kan rechtstreeks van U naar W gaan: $g_{WU} = g_{WV} \circ g_{VU}$.

n	Type object
0	(gladde) functie
1	(differential)vorm
2	2-vorm
\vdots	\vdots
n	n -vorm

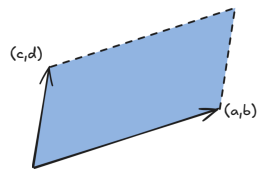
Tabel 5.1: Differentiaalvormen.

Dit is ook de reden waarom bij sommige objecten de indices onderaan staan, zoals bij de impuls p_i , en bij sommige objecten bovenaan, zoals bij de coördinaten q^i . Een bovenindex wijst op een coördinaat of vectorveld, een onderindex wijst op een differentiaalvorm of, met andere woorden, een bovenindex transformeert met de Jacobiaan en een onderindex transformeert met de omgekeerde Jacobiaan. Uiteraard kan je ook gekkere combinaties hebben, zoals één bovenindex

en één onderindex, of vijf bovenindices en twee onderindices. Deze objecten transformeren dan met meerdere kopieën van de Jacobiaan en zijn inverse. De veldsterkte is zo een voorbeeld, een met twee onderindices. Deze transformeert dus met twee kopieën van de omgekeerde Jacobiaan:

$$F_{ij|U} = \sum_{k,l=1}^n F_{kl|V} J^{-1}(g_{UV})_i^k J^{-1}(g_{UV})_j^l.$$

Een dergelijke object zullen we een (differentiaal) 2-vorm noemen (zie ook Tabel 5.1 op voorgaande pagina). Maar kijk nog eens goed naar de definitie van de veldsterkte. Als je de twee indices omwisselt van plaats bekom je een minteken, het is een ‘antisymmetrisch’ object. Dat je een minteken krijgt wanneer je twee van de n indices omwisselt van plaats is een eigenschap die men eist van alle differentiaalvormen ter veralgemening van de oppervlakte van een parallellogram: $A = ad - bc$. 2-vormen stellen als het ware infinitesimale oppervlakte-elementen voor. Deze relatie stelt ons onder meer in staat om de integratietheorie van Riemann (en latere uitbreidingen zoals die van Lebesgue) uit te breiden naar algemene variëteiten.



Figuur 5.2: Oppervlakte van een parallellogram.

Naast de veldsterkte zijn we trouwens nog enkele voorbeelden van dergelijke objecten tegengekomen. De Riemannkromming R uit Hoofdstuk 3 is ook zo een 2-vorm. Dit verklaart ook waarom we toen twee vectorvelden nodig hadden om de kromming te definiëren. R eet deze op om een getal, de kromming, uit te spuwen! Bovendien hebben we in vorig hoofdstuk gezien hoe de Bohr–Sommerfeldvoorwaarde zei dat het Poissonhaakje overeen moest komen met een soort interne kromming als we willen dat kwantummechanica consistent is en werkt. Met wat we net gezegd hebben, betekent dit dus dat het Poissonhaakje meetkundig ook zou moeten gegeven worden door een 2-vorm. Dit is zonder twijfel ook het geval:

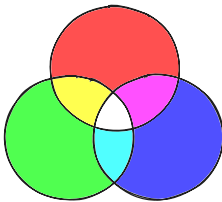
$$\{f, g\} = \omega(X^f, X^g).$$

Wiskundigen noemen dit de **symplectische vorm**. Voor hen is klassieke mechanica eigenlijk niets anders dan de studie van de symplectische meetkunde. (Om helemaal correct te zien dienen we te zeggen dat Poissonmeetkunde strikt algemener is dan symplectische meetkunde, zeker als men bijvoorbeeld naar oneindig-dimensionale variëteiten kijkt. Voor ons is dit verschil echter niet van belang.)

Deze uitweiding terzijde, laat ons nog eens de formules voor de Riemannkromming en de veldsterkte uit dit hoofdstuk bekijken:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu \quad \text{en} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Als we de twee laatste termen uit de Riemannkromming wegdenken, dan bekommen we ogenschijnlijk dezelfde formule als voor de veldsterkte! (Dat de factoren Γ niet met elkaar commuteren is trouwens een gevolg van wat die objecten zijn. Het zijn operatoren en geen functies, en die commuteren niet altijd zoals we in vorig hoofdstuk zagen.) De veldsterkte is dus ook een soort kromming, maar net zoals bij kwantummechanica zitten we hier alweer met een interne kromming. Zoals we reeds in Hoofdstuk 3 verklaapt hadden is niet enkel de zwaartekracht het gevolg van kromming, ook de elektromagnetische kracht kan meetkundig als een kromming gezien worden. De potentiaal $\vec{A}^{(4)}$ komt in dit geval overeen met de connectie en moet dus een soort overdracht van informatie verwezenlijken, maar welk soort informatie is dit?



Figuur 5.3: Kleurla-ding.

In het begin van dit hoofdstuk zagen we hoe de vergelijkingen van Maxwell een zekere vrijheid in de keuze van potentialen toelieten. Een dergelijke vrijheid wordt ook wel een **ijkvrijheid** genoemd. (Herinner je nog de analogie met munteenheden. De keuze van een eenheid is ook wel gekend als een ijking.) De connectie, die in de fysica ook wel gekend staat als het **ijkveld**, draagt de informatie over welke ijk we kiezen. Dit formalisme van ijkvelden/connecties bleek zo succesvol te zijn dat het jaren later door

Yang en Mills gebruikt werd om de zwakke kernkracht te beschrijven. Deze 'kracht' is verantwoordelijk voor radioactief verval! Het zet onder andere protonen en neutronen in elkaar om. Sindsdien worden dergelijke theorieën **Yang–Millstheorieën** of, meer algemeen, **ijktheorieën** genoemd. Ook de laatste overblijvende fundamentele kracht, de sterke kernkracht, bleek beschreven te kunnen worden op deze manier. Deze kracht zorgt er niet enkel voor dat de protonen en neutronen in atoomkernen samenhan-

gen, maar leert ons ook hoe protonen en neutronen zelf ook uit nog kleinere deeltjes bestaan, de zogenaamde quarks! Het analogon van de elektrische lading voor de sterke kernkracht wordt trouwens 'kleur' genoemd zoals hieronder te zien. (Sub)atomaire deeltjes zullen altijd combineren op een manier waarbij de totale kleur wit is. (De lading voor de zwakke kernkracht, de zogenaamde *zwakke isospin*, is moeilijker te visualiseren.)

We zien dus dat niet enkel de zwaartekracht op een meetkundige manier beschreven kan worden, maar dat ook het hele 'Standaardmodel' van de deeltjesfysica een meetkundige beschrijving toelaat, het is één grote Yang–Millstheorie.² Maar als die meetkundige ideeën zo gelijkaardig zijn, waarom noemen we de zwaartekracht dan geen ijktheorie? En waarom zijn de zwaartekracht en de deeltjesfysica nog steeds niet geünificeerd? Hier zijn heel wat kanttekeningen bij te maken. Enerzijds is er het duidelijke verschil tussen de fysieke ruimte in de zwaartekracht en de interne vrijheidsgraden in de deeltjesfysica. Anderzijds is er een groot verschil in de onderliggende algebraïsche structuren (al is dit eerder een semantische kwestie). Om deze twee redenen wordt de zwaartekracht soms wel een ijktheorie genoemd, maar geen Yang–Millstheorie. Het unificatieverhaal is echter een andere kwestie. Een belangrijk punt hier is het verschil tussen klassiek en kwantum. In het klassieke verhaal is er eigenlijk geen probleem om de veldentheorieën die de deeltjesfysica beschrijven uit te werken in een gekromd universum! Bovendien is kwantumzwaartekracht ook enkel een probleem in situaties waar de zwaartekracht heel sterk wordt, waar storingsrekening (denk terug aan vorig hoofdstuk) niet meer volstaat. Voor zwakke zwaartekrachtsvelden, ver weg van zwarte gaten en *Big Bangs* (of *Big Crunches*, *Big Bounces*, etc.), werkt kwantumzwaartekracht zeer goed! We negeren hier dan zelfs nog het probleem dat het Standaardmodel zelf, dus zonder zwaartekracht, ook nog niet volledig gekwantiseerd is, toch niet op een formele manier. Moest jij hier in

²Onder meer de Nederlandse topfysicus Gerard 't Hooft heeft hier een grote bijdrage aan geleverd. Hij toonde aan dat de vele oneindigheden die normaal gezien opduiken in kwantumveldentheorie op een elegante manier kunnen weggewerkt worden. Zonder zijn bijdragen zouden we niet in staat zijn om fysisch relevante grootheden uit te rekenen en te voorspellen.

slagen, dan ligt er een prijs van één miljoen euro op jou te wachten en vermoedelijk ook een Nobelprijs, want dit probleem is een van de zogeheten Milleniumproblemen van het Clay Mathematics Institute.³

Vooraleer we dit hoofdstuk kunnen afsluiten met een introductie tot kwantumveldentheorie, moeten we nog één kwestie, waar we in het begin van het hoofdstuk naar gealludeerd hebben, behandelen. In de klassieke mechanica telde de ruimte n ruimtelijke coördinaten en n impulsen, de faseruimte telde in totaal $2n$ coördinaten. Voor veldentheorieën zou dit echter onmiddellijk uit de hand lopen, want we hebben oneindig veel coördinaten nodig (de waarde van de velden op elk punt van de ruimte). Om dit op te lossen is het beter om de notie van faseruimte anders te behandelen. Tot nu toe bekeken we de bewegingsvergelijkingen als vergelijkingen die, gegeven beginvoorwaarden, een pad doorheen de faseruimte uitsneden. Dit pad wordt dan gezien als de fysische oplossing van de vergelijkingen. Een andere manier is echter om de faseruimte simpelweg te definiëren als de ruimte van alle oplossingen of zelfs van alle mogelijke oplossingen. De bewegingsvergelijkingen zijn dan geen evolutievergelijkingen meer, maar gewoonweg algebraïsche vergelijkingen zoals de vierkantsvergelijking $y = ax^2 + bx + c$ die je in het middelbaar leert oplossen! Een oplossing wordt nu een punt in een (oneindig-dimensionale) ruimte die we de **covariante faseruimte** noemen. Dit is volledig onafhankelijk van eender welke keuze van coördinaten of zelfs van wat we ‘tijd’ noemen. Het fantastische is dat alle concepten die we tot nu toe zagen, zoals vectorvelden, kromming en het Poissonhaakje, ook gedefinieerd kunnen worden op deze nieuwe faseruimte, we kunnen alle analyses op dezelfde manier (proberen) uitvoeren. Hier treedt er echter een fundamenteel probleem op. De ijkvrijheden (die eigenlijk in elke veldentheorie aanwezig zijn) weerspiegelen de aanwezigheid van overbodige informatie in onze beschrijving. Niet alle punten in de covariante faseruimte, oplossingen van de bewegingsvergelijkingen met andere woorden, zijn fysisch verschillend en we moeten een manier vinden om equivalente oplossingen

³Tot nu toe is slechts een van de zeven Milleniumproblemen opgelost, het ‘vermoeden van Poincaré’.

met elkaar te identificeren. De meest succesvolle methode om dit probleem op te lossen gaat zelfs terug op het werk van Dirac over het Poissonhaakje. In plaats van oplossingen te identificeren (iets wat wiskundig vaak aanleiding geeft tot onaangename meetkundige objecten), zullen we coördinaten toevoegen die ervoor zorgen dat twee fysisch identieke oplossingen niet meer door een ijkvrijheid in elkaar omgezet worden. Maar wat stellen die extra coördinaten dan voor? Wel, dat zijn de mysterieuze [spookdeeltjes](#). Het zijn niet-fysische vrijheidsgraden die ons het leven makkelijker maken, maar niet waar te nemen vallen (net zoals spoken). Ze geven ons louter een algebraïsch hulpmiddel om symmetrieën en beperkingen te beschrijven in de theorie. (Als je hier meer wil over weten, lees dan later de extra's bij Hoofdstuk 7.)

Eigenlijk alles wat we tot nu toe in dit hoofdstuk besproken hebben is klassieke veldentheorie, we hebben hier nog geen echte kwantummechanica in verwerkt. De kwantisatie van een klassieke veldentheorie is echter nog problematischer dan het kwantiseren van de klassieke mechanica. De meest gebruikelijke methode (die wiskundig allesbehalve goed begrepen is) is de padintegraalmethode van Feynman waar in het vorige hoofdstuk twee maal naar refereerden. Klassiek hebben we als oplossing één element ϕ uit de covariante faseruimte M , maar kwantummechanisch kunnen we echter een superpositie krijgen. Analoog aan de statistische mechanica beschouwen we een functie $S : M \rightarrow \mathbb{R}$, genaamd de [actie](#), die zegt hoeveel elke (kwantummechanische) veldconfiguratie zal bijdragen. Hier wordt deze gegeven door de *integraal* van de Lagrangiaan over de hele ruimte:

$$S(\phi) := \int_M L(\phi) d\text{Vol}_M .$$

De 'gemiddelde waarde' van een fysische observabele wordt dan gegeven door zijn statistische verwachtingswaarde:

$$\langle F \rangle := \frac{\int F(\phi) e^{iS(\phi)} D\phi}{\int e^{iS(\phi)} D\phi} .$$

Aangezien we geen integralen in dit boek geïntroduceerd hebben, moet je ook geen schrik hebben als je deze formule niet onmiddellijk begrijpt.

De integralen in deze uitdrukking zijn wiskundig zelfs bijna nooit goed gedefinieerd. Om de uitdrukking toch wat beter te begrijpen, beschouwen een (eindig) voorbeeld uit de klassieke statistiek. Beschouw een doos met $n \in \mathbb{N}$ gewichten m_i in waarvoor we de kans p_i voor elk gewicht kennen. Het gemiddelde gewicht van de gewichten is dan gegeven door:

$$\langle m \rangle = \sum_{i=1}^n m_i p_i,$$

je weegt elke massa met de bijhorende kans. Stel nu dat we niet de kansen p_i kennen, maar enkel het aantal keer $n_i \in \mathbb{N}$ dat het gewicht m_i voorkomt. In dat geval kunnen we de kansen p_i berekenen als de fractie van het totaal:

$$p_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^n n_i}.$$

Nemen we deze twee uitdrukkingen samen, dan bekomen we de statistische tegenhanger van de padintegraalmethode:

$$\langle m \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n m_i n_i}{\sum_{i=1}^n n_i}.$$

De relatie met de statistische mechanica is eigenlijk zelfs meer dan een analogie. Een van de best bestudeerde technieken om padintegralen formeel te begrijpen is door het probleem uit kwantumveldentheorie om te zetten in een probleem uit de statistische mechanica. Dit kan men bewerkstelligen door de tijdscoördinaat complex te maken: $t \rightarrow it$. Een dergelijke transformatie ook wel een [Wicktransformatie](#) genoemd.

Om de padintegralen uit te rekenen, dienen we echter terug te vallen op storingsrekening. We bekijken eerst de belangrijkste bijdragen (de klassieke oplossingen) en dan voegen we stapsgewijs kwantumeffecten toe. De meest gekende techniek hiervoor zijn de Feynmandiagrammen zoals te zien in Figuur 5.4 verderop. In het tweede diagram is er bijvoorbeeld een lus te zien in het midden. Dit wijst erop dat dit een tweede-orde bijdrage is. Hoe hoger de orde, hoe meer interne structuur het diagram heeft en hoe complexer de berekening wordt. Voor elektromagnetisme volstaat

het om enkel de laagste-orde termen mee te nemen — het is een zogenaamde zwak gekoppelde theorie — terwijl bij de sterke kernkracht zich het tegenovergestelde voordoet, daar worden de bijdragen schijnbaar belangrijker naarmate men kwantumcorrecties toevoegt. Het is zelfs zo erg dat ‘storingsrekening’ hier figuurlijk moet worden genomen. In de praktijk geven veel van de diagrammen waar lussen in voorkomen aanleiding tot oneindigheden, alles behalve kleine correcties dus. Deze oneindigheden kunnen worden opgelost door het concept *renormalisatie* in te voeren, wat door wiskundigen vaak (verkeerdelijk) gezien wordt als creatief omgaan met oneindig. Denk bijvoorbeeld aan de klassieke paradox

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n = -\frac{1}{12}.$$

Is de som van alle natuurlijke getallen een negatief rationeel getal? Uiteraard niet, maar het creatief rekenen maakt wel gebruik van deze uitdrukking (al is het daar iets subtieler).

Extra's

Laten we eerst nog eens de formules voor de Riemannkromming en de elektromagnetische veldsterkte wat meer in detail bekijken. Die eerste had twee extra termen, maar wat stellen deze termen eigenlijk voor? Dit heeft deels te maken met het verschil in de algebraïsche structuur achter zwaartekracht en ijktheorieën. In het elektromagnetisme staan die twee termen er stiekem ook, ze heffen elkaar in dat geval gewoonweg op. We hadden gezegd dat de twee termen $\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu}$ elkaar niet opheffen omdat de Γ 's (lineaire) operatoren voorstellen en niet gewoon getallen of functies. Het verschil komt omdat de interne vrijheidsgraad bij elektromagnetisme van dezelfde aard is als in de kwantummechanica, het is een soort fase en dus eendimensionaal van aard. Elke lineaire transformatie van een eendimensionale vectorruimte is gegeven door de vermenigvuldiging met een getal, je kan immers niet meer doen met een enkele component, en een getal in

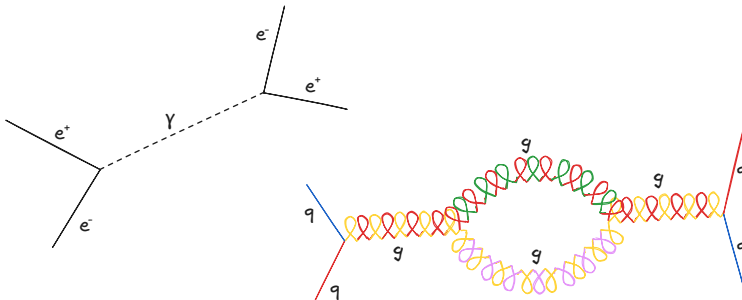
elk punt van de ruimte, dat is gewoon een functie. De connectiecoëfficiënten voor elektromagnetisme, ook al stellen ze lineaire operatoren in elk punt van de ruimte voor, worden gegeven door gewone functies en die functies commuteren:

$$A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu = 0.$$

Bij zwaartekracht worden de vrijheidsgraden gegeven door de raakvectoren en deze zijn vierdimensionaal (drie ruimtelijke dimensies en een tijdsdimensie). De operatoren hier zijn dus ‘echte’ operatoren die we kunnen voorstellen door 4×4 -matrices en matrices commuteren niet (noodzakelijk). Om deze reden vallen de twee termen niet weg bij zwaartekracht. Nu kan je je misschien de vraag stellen hoe dit zit bij de zwakke en sterke kernkrachten. Wel, daar zijn de interne vrijheidsgraden ook hogerdimensionaal (respectievelijk twee- en driedimensionaal) en we zullen dus ook de **interactietermen** $A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu$ terugvinden in de uitdrukking voor de veldsterkte. De naam interactieterm is trouwens niet toevallig. Het optreden van dergelijke termen impliceert dat de ijkvelden met zichzelf interageren. Zo zullen de W - en Z -bosonen die de zwakke kernkracht overbrengen en de gluonen die de sterke kernkracht overbrengen onderling ook interageren, in tegenstelling tot de fotonen die absoluut niet met zichzelf interageren (ze hebben immers geen elektrische lading). Omdat de interactietermen niet symmetrisch zijn, worden deze theorieën soms ook **niet-Abelse theorieën** genoemd.⁴

Dit is dan ook het geschikte moment om de relatie met deeltjesfysica verder uit te diepen. Voor elektromagnetisme was er zoals gezegd maar één vrijheidsgraad. Dit is zonder meer de eenvoudigste situatie en informatieoverdracht is dus ook niet te ingewikkeld, met als gevolg dat er maar één soort foton is. Voor de kernkrachten ligt dit anders. Daar zijn de dimensies voor de interne vrijheidsgraden respectievelijk twee en drie en kunnen we dus meerdere deeltjes verwachten. Als jouw intuïtie nu zou

⁴Abel was een wiskundige wiens werk mee aan de basis van de ‘groepentheorie’ lag. Hij had onafhankelijk van Galois een bewijs gevonden dat de algemene oplossingen van een vijfdegraadsvergelijking niet via een algebraïsche formule kunnen gevonden worden en in dit bewijs speelde commutativiteit een essentiële rol.



Figuur 5.4: Feynmandiagram voor fotonen en gluonen.

zeggen dat dit betekent dat er ook twee krachtdeeltjes voor de zwakke en drie krachtdeeltjes voor de sterke kernkracht zijn, dan zal je teleurgesteld zijn. Voor de zwakke kernkracht zijn er drie deeltjes, de W^{\pm} - en Z -bosonen, en voor de sterke kernkracht zijn er zelfs acht deeltjes, die allemaal als **gluonen** gekend staan. Moesten we nog een niveautje hoger gaan dan zouden er bijvoorbeeld 15 mogelijkheden zijn. De algemene formule voor het aantal krachtdeeltjes is $n^2 - 1$, waarbij n het aantal interne vrijheidsgraden is (voor elektromagnetisme moeten we om een technische reden $n^2 = 1$ nemen, anders waren er geen krachtdeeltjes). Het Standaardmodel is alweer een prachtig voorbeeld waarin de natuur voor de eenvoudigste optie gegaan is. Behalve zwaartekracht, die een andere algebraïsche structuur heeft en niet in dit rijtje past, worden de fundamentele krachten door de drie laagste treden uit deze ladder van Yang-Millstheorieën beschreven. (Voor zover we weten natuurlijk.) Dit valt nu ook te relateren aan voorgaande paragraaf. Beschouw opnieuw de sterke kernkracht met zijn drie vrijheidsgraden gegeven door de basiskleuren rood, groen en blauw. Hoe kunnen we hier nu acht gluonen uit krijgen? Wel, een gluon draagt eigenlijk zowel een kleur als een 'antikleur', de complementaire kleur uit Figuur 5.3. Zo zal een gluon met (kleur)lading $r\bar{b}$ bijvoorbeeld een blauwe quark in een rode omzetten zoals grafisch voorgesteld in Figuur 5.4. We moeten dus naar combinaties van kleuren en complementaire kleuren kijken, maar dit lijkt negen combinaties te geven

(drie maal drie). Die negen combinaties kunnen gezien worden als de basisvectoren voor een negendimensionale vectorruimte en in vectorruimtes kunnen we vectoren optellen. Er bestaat dus een combinatie $r\vec{r} + g\vec{g} + b\vec{b}$, maar dat is gewoon wit en wit is eigenlijk een toestand die geen kleur kan overbrengen, dus die moeten we weggooien!

Als laatste bekijken we nog een stukje absoluut prachtige wiskunde (of toch de aanzet ertoe). Er is een heel elegante manier om van een n -vorm een $(n + 1)$ -vorm te maken: de [de Rham-afgeleide](#). In lokale coördinaten is dit zelfs niet meer dan de afgeleide nemen:

$$d\omega_{j_1 \dots i_n} := \partial_j \omega_{i_1 \dots i_n}.$$

Wegens de antisymmetrie die we geëist hebben voor differentiaalvormen betekent dit dus ook dat deze coëfficiënten nul zijn zodra de index j gelijk is aan een van de andere indices i_k . Diezelfde antisymmetrie zorgt er nu ook voor dat $d^2\omega = 0$ voor eender welke differentiaalvorm ω , aangezien afgeleiden commuteren:

$$\partial_k \partial_j \omega_{i_1 \dots i_n} \stackrel{\text{commuteren}}{=} \partial_j \partial_k \omega_{i_1 \dots i_n} \stackrel{\text{antisymmetrie}}{=} -\partial_k \partial_j \omega_{i_1 \dots i_n}.$$

Die ogenschijnlijk onschuldige relatie $d^2 = 0$ vormt de basis voor ontelbare deelgebieden van de wiskunde. Je kan er boeken over volschrijven! Het onderliggende concept wordt [\(co\)homologie](#) genoemd en kan in de fysica gebruikt worden in zowel deeltjesfysica, vastestoffysica als de studie van elektrische schakelingen.

Hoofdstuk 6

Vloeistofmechanica & filosofie met Lawvere

In dit hoofdstuk pakken we het wat anders aan en laten de concrete fysica even achter ons. De meeste boeken zouden in de latere hoofdstukken een hip en actueel onderwerp uitkiezen om wat verder toe te lichten, denk bijvoorbeeld aan snaartheorie, kosmologie of kwantuminformatietheorie. Over de relevantie van deze onderwerpen valt niet te discussiëren, maar er bestaan hier al voldoende boeken en podcasts over. Aangezien de ‘gevestigde fysica’ voor ons nu is afgewerkt (op alle details en overgeslagen onderwerpen na) en we niet in het vaarwater van andere auteurs willen komen, moeten we dus een totaal andere weg inslaan. Zoals de titel doet vermoeden, zal dit hoofdstuk niet enkel over natuurkunde gaan, integraal, maar net dit maakt de inhoud zo interessant. De concepten die we zullen tegenkomen zijn zeer breed toepasbaar en kunnen op een *high-level* manier worden uitgelegd [2]. We zullen gaan van oud-Griekse tot hedendaagse filosofie, van klassieke logica tot supersymmetrie, en van taalkunde tot computerwetenschappen [4]. Uiteraard is de keuze voor dit onderwerp niet willekeurig. De ideeën zullen ons in staat stellen om di-

verse fenomenen te unificeren, fenomenen die voorkomen in de hippe onderwerpen zoals snaartheorie en kwantuminformatietheorie. Er staat ons dus nog een heus avontuur te wachten.

Ons verhaal begint bij de wiskundige Lawvere in de jaren 50 van de vorige eeuw. Tijdens zijn academische opleiding werkte hij voornamelijk op continuümmechanica, de klassieke mechanica van continue systemen zoals vloeistoffen. Dit deelgebied staat bekend om zijn complexe vergelijkingen met allerhande afgeleiden. Misschien wel de meest bekende en beruchte vergelijkingen uit de vloeistofmechanica zijn de Navier–Stokes-vergelijkingen die visceuze vloeistoffen beschrijven. Bewijzen dat deze vergelijkingen een algemene oplossing hebben die geen singulariteiten bevatten, is trouwens het onderwerp van een van die zes andere Millenium-problemen. Om dergelijke vergelijkingen op te lossen, zij het analytisch of numeriek, worden de afgeleiden vaak benaderd door eindige verschillen en breuken:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

In numerieke simulaties laat zo een benadering ons toe om de ruimte en de tijd op te delen in kleine hokjes of cellen. De differentiaalvormen uit vorig hoofdstuk komen dan overeen met kleine afstanden, oppervlakken, volumes, etc. Lawvere was echter niet gelukkig met de informele manier waarop fysici vaak omgaan met deze wiskundige concepten en zocht dan maar een manier om de intuïtieve argumenten en technieken uit de natuurkunde wiskundig hard te maken. De fundamenten van de wiskunde en natuurkunde, die honderden jaren eerder op revolutionaire wijze door Newton waren ingevoerd, stonden op het punt om opnieuw op hun kop gezet te worden. Lawvere zijn idee was om de reële getallen \mathbb{R} (of de complexe getallen \mathbb{C} als je aan kwantummechanica wil doen) uit te breiden met nieuwe elementen die heel, heel kleine getallen voorstellen. Dergelijke ‘infinitesimale getallen’, die we vaak met de Griekse letter ε aanduiden, zijn zelf niet nul maar zijn wel zo goed als nul:

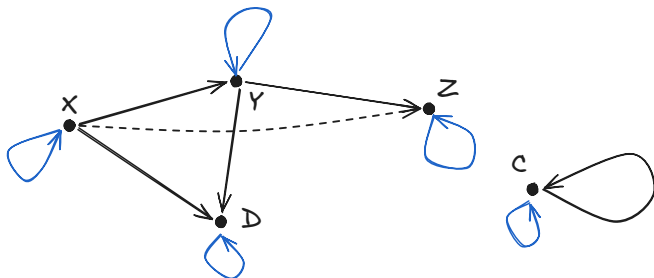
$$\varepsilon^2 = 0.$$

Er is geen enkel normaal getal dat hieraan voldoet. We leren allemaal op school dat enkel nul kwadrateert tot nul, maar er is ook geen enkele reden waarom we dit nieuwe object niet kunnen toevoegen aan onze gekende getallen. Uiteindelijk is dit ook hoe de complexe getallen tot stand kwamen, want voordien dacht men ook dat er geen enkel normaal getal kwadrateerde tot een negatief getal. Maar wat kunnen we bereiken met zo een infinitesimaal getal ε ? Wel, we kunnen het identificeren met afgeleiden en vectorvelden. Waar we in de voorgaande hoofdstukken soms “een klein beetje opgeschoven in de richting van een raakvector” (zoals in Figuur 3.11), zullen we dit nu bekijken als een functie

$$v_\varepsilon : \mathbb{R}\varepsilon \rightarrow M.$$

Voor $\lambda = 0$ krijg je het punt waar de raakvector gedefinieerd is en voor $\lambda \neq 0$ krijg je het resultaat van zijn (infinitesimale) stroming. (Voor de lezers van de extra's: we kunnen v_ε dus identificeren met de generator uit Hoofdstuk 2.) Alle analytische en algebraïsche eigenschappen van vectorvelden zitten nu verwerkt in de eigenschappen van de functie v_ε . In de klassieke (differentiaal)meetkunde is het zeer moeilijk om vectorvelden en andere objecten zoals differentiaalvormen te beschrijven aan de hand van één functie. Het beste wat je meestal kan doen is ze lokaal aan de hand van coördinaten beschrijven. Lawvere stelt ons echter in staat om dit toch met één functie te doen, maar enkel en alleen als we aanvaarden om met meer algemene ‘getallen’ te rekenen.

Dat alle informatie opgeslagen zit in een functie tussen twee ruimtes, in dit geval de ‘infinitesimale rechte’ $\mathbb{R}\varepsilon$ en onze variëteit M , is nog het belangrijkste dat we hieruit moeten meenemen. We keren terug van de analytische methode van Descartes, waar expliciete formules en constructies centraal staan, naar de synthetische wiskunde van Euclides, waar structuren en relaties centraal staan. Een object krijgt pas waarde en betekenis als we zijn relatie met andere objecten kennen en alle structuur zit geëncodeerd in deze relaties. Dit idee werd doorheen de 20^e en begin 21^e eeuw — nu dus — verder uitgewerkt en laat ons niet alleen toe om diagrammatisch te redeneren, de abstractie stelt ons ook in staat om sneller gelijkenissen en analogieën te zien aangezien we niet meer verloren lopen in de details.



Figuur 6.1: Categorie met vijf objecten.

Laten we dus aan wat metawiskunde doen en kijken wat deze synthetische aanpak ons kan bieden. Welkom in de wondere wereld van de [categorietheorie](#)! (Dit is het moment waarop zelfs wiskundigen wel eens bang durven worden.) Ondanks alle mythes die hieromtrent de ronde doen, zijn de basisideeën van de categorietheorie niet ingewikkeld, integendeel zelfs. Vanaf nu zullen we volledig blind zijn voor de interne structuur van objecten. We hebben enkel nog [objecten](#) en pijlen (of [morfismen](#) voor de puristen) ertussen en er zijn maar twee voorwaarden waar deze pijlen aan moeten voldoen:

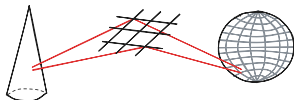
- Voor elk object X is er een [identiteit](#) $\mathbb{1}_X : X \rightarrow X$. In de figuur hierboven zijn dit de blauwe pijlen. De identiteit laat ons toe om een object toch minstens met zichzelf te vergelijken.
- We moeten de pijlen ook kunnen samenstellen. Gegeven een pijl $f : X \rightarrow Y$ en een pijl $g : Y \rightarrow Z$, dan hebben we ook de samengestelde pijl $g \circ f : X \rightarrow Z$. In de figuur hierboven is dit bijvoorbeeld de stippelijijn. Deze samenstelling moet op zijn beurt dan weer goed samenwerken met de identiteiten, bijvoorbeeld $f \circ \mathbb{1} = f$.

Als we dit even laten bezinken en terugdenken, dan zien we al snel dat zo goed als elk (wiskundig) concept dat we zijn tegengekomen, zowel op school als doorheen dit boek, een categorie vormt. Enkele voorbeelden zijn verzamelingen met functies ertussen, vectorruimtes met lineaire

operatoren, veelhoeken met gelijkvormigheidsrelaties, ... Maar we hoeven niet te stoppen bij klassieke functies, kijk bijvoorbeeld nog eens naar de figuur hierboven. Alle *grafien* zoals deze diagrammen, wegenkaarten of sociale netwerken voldoen aan de voorwaarden van een categorie. Als we een route plannen van Parijs naar Brussel en een van Brussel naar Amsterdam, dan hebben we automatisch ook een route van Parijs naar Amsterdam, je plakt de twee individuele routes simpelweg aan elkaar. Een ander voorbeeld duikt op wanneer we niet naar functies tussen verzamelingen kijken, maar naar de elementen binnenin een verzameling. Neem bijvoorbeeld de natuurlijke getallen \mathbb{N} . Gegeven twee getallen kunnen we ons de vraag stellen of de ene kleiner is dan of gelijk is aan de andere, en indien we weten dat $a \leq b$ en $b \leq c$, dan weten we ook direct dat $a \leq c$. De natuurlijke getallen met de gebruikelijke orderrelatie vormen een categorie! (Dit is trouwens meer algemeen het geval voor alle orderrelaties [2].)

De vraag is nu uiteraard wat we hiermee kunnen doen. Hierboven werd jou toevertrouwd dat alle structuur verborgen zit in de relaties tussen objecten, maar wat betekent dat precies? Een van de basisresultaten van de categorietheorie, het lemma van Yoneda, is dat een verzameling X volledig wordt bepaald door alle functies naar (of uit) X . Het bewijs hangt echter totaal niet af van de definitie van een verzameling, enkel van de voorwaarden van een categorie. We kunnen dit resultaat dus zonder meer uitbreiden naar algemene categorieën. Een stad is bijvoorbeeld ook uniek bepaald door alle wegen die eruit vertrekken. Categorieën hebben trouwens nog een ander nut. Ze laten ons toe om gaten op te vullen. Stel, we hebben een categorie met objecten die voor ons van groot belang zijn, zoals variëteiten voor klassieke mechanica en veldentheorie. In de praktijk zijn we vaak geïnteresseerd in specifieke constructies. Typische voorbeelden zijn het vormen van functieruimten van bijvoorbeeld alle (gladde) functies tussen twee variëteiten, (Cartesiaanse) producten die alle koppels van punten uit twee variëteiten bevatten, of quotiënten waarbij we punten identificeren aan de hand van een equivalentierelatie. (Denk bijvoorbeeld aan de ijktransformaties tussen fysisch equivalente oplossingen). Spijtig genoeg geven deze constructies in de realiteit

vaak niet opnieuw een object in de categorie waarvan we vertrokken, ze werken erbuiten. Alle functies tussen twee verzamelingen vormen opnieuw een verzameling, maar alle gladde functies tussen twee variëteiten vormen maar zelden opnieuw een variëteit. Hetzelfde geldt voor quotiënten want deze hebben vaak ook niet meer dezelfde eigenschappen als de oorspronkelijke variëteiten. Spijtig, want quotiënten zijn belangrijk omdat symmetrieën ons toelaten om vergelijkingen en oplossingsverzamelingen te reduceren. Categoriëtheorie laat ons gelukkig (vaak) toe om de categorie waarmee we beginnen uit te breiden tot een categorie die wel de gewenste constructies toelaat! Bovendien blijven de oorspronkelijke relaties tussen onze vertrouwde objecten bewaard, het eindresultaat zal dus niet al te vreemd zijn.



Figuur 6.2: Functies tussen variëteiten.

Dat objecten bepaald worden door hun relaties stelt ons ook in staat om synthetische argumenten *à la* Euclides te gebruiken. Onbewust deden we dit reeds bij het beschrijven van variëteiten aan de hand van (lokale) coördinatenstelsels. Hierbij spreidden we vlakke kaarten uit in meetkundige objecten door middel

van functies $\mathbb{R}^n \rightarrow M$ zoals hiernaast afgebeeld. De kegel aan de linkerzijde, die we ook tegenkwamen in Hoofdstuk 3, is bijvoorbeeld geen echte variëteit. De top, waar alle kromming in verstopt zit, heeft immers geen enkele omgeving die lijkt op een vlakke ruimte. In onze nieuwe, grotere categorie is de kegel echter wel inbegrepen. De reden hiervoor is dat we op een minder strikte manier aftasten met lokale coördinaten, de ruimte hoeft niet meer lokaal vlak te zijn. Dat we onze lokale kaarten op een meer algemene manier kunnen definiëren, heeft trouwens nog meer voordelen.

Om deze te bespreken, gaan we even de filosofische kant uit, naar Socrates en Hegel. Dialectiek is een spreek- of denkwijze waarbij twee visies lijnrecht tegenover elkaar worden geplaatst (de these en antithese). Hun verschillen worden uitgelicht, niet noodzakelijk om de ene of de andere als beter te bestempelen, maar eerder om tot een uiteindelijke overeenkomst

te komen (de synthese). Schijnbaar ongerelateerd aan dit hoofdstuk komen dialectische situaties vaak voor in de wiskunde, en bijkomstig ook in de wetenschap.

Laten we eerst een eenvoudig geval bekijken, de natuurlijke getallen \mathbb{N} . Deze getallen kunnen in twee verschillende kampen worden ingedeeld, enerzijds de even getallen en anderzijds de oneven getallen. Geen enkele natuurlijk getal hoort in beide thuis. Zoals reeds eerder vermeld vormt \mathbb{N} een categorie met als pijlen de orderelaties. Op deze categorie kunnen we drie constructies beschouwen (met een voorbeeld):

$$\begin{array}{ll} E : n \mapsto 2n & E(5) = 10 \\ \lfloor m/2 \rfloor \leftarrow m : D & 4 = D(9) \\ O : n \mapsto 2n + 1. & O(3) = 7. \end{array}$$

De operaties E en O beelden een (natuurlijk) getal respectievelijk af op zijn dubbele (een even getal) of zijn dubbele plus één (een oneven getal). D daarentegen neemt een natuurlijk getal en beeldt het af op zijn 'generator' onder E of O . Deze operatie voldoen nu aan enkele interessante eigenschappen:

$$\begin{aligned} E(n) \leq m &\iff n \leq D(m), \\ D(n) \leq m &\iff n \leq O(m). \end{aligned}$$

Een pijl $E(n) \rightarrow m$ is dus equivalent aan een pijl $n \rightarrow D(m)$. Een dergelijke relatie $E \dashv D$ wordt ook wel een **adjunctie** genoemd. In dit voorbeeld hebben we zelfs te maken met een dubbele adjunctie $E \dashv D \dashv O$ die bovendien alle aspecten van dialectiek illustreert: eenheid, tegenstelling en vereniging.

- Eenheid: Neem eender welk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ en bereken de samenstellingen $E \circ D(n)$ en $(E \circ D)^2(n)$. Je zal merken dat deze twee resultaten gelijk zijn. Eenmaal je een even (resp. oneven) getal hebt, blijft het even (resp. oneven).
- Tegenstelling: Het drietal geeft aanleiding tot een tweede adjunctie

$$E \circ D \dashv O \circ D:$$

$$2\lfloor n/2 \rfloor \leq m \iff n \leq 2\lfloor m/2 \rfloor + 1.$$

(«*Reken dit ook maar eens na.*») Even en oneven getallen staan tegenover elkaar.

- Vereniging: $D \circ E = D \circ O$. Even en oneven getallen worden verenigd door hun generator.

Bovendien geldt ook nog eens dat

$$E \circ D(n) \leq n \leq O \circ D(n).$$

Elk natuurlijk getal zit tussen een even en een oneven getal in (uiteraard, want elk getal is ofwel even of oneven). In dit voorbeeld zijn de eigenschappen tamelijk vanzelfsprekend en niet zo indrukwekkend, maar hun veralgemening naar andere categorieën houden heel wat meer in.

Laten we nog een ander voorbeeld van adjuncties bekijken dat ook zijn oorsprong vindt in de filosofie: *Dasein*. Dit concept, populair bij filosofen zoals Kant en Heidegger, is een abstractie van het 'zijn'. In het dagelijkse leven zijn er twee (ongenuanceerde) mogelijkheden, je hebt iets of je hebt niets. In de categorietheorie zijn er veel gevallen waarbij je twee gelijkaardige objecten hebt: het ledige object \emptyset en het object met één element $*$. Deze brengen twee (triviale) constructies met zich mee:

$$N : X \mapsto \emptyset \quad \text{en} \quad P : X \mapsto *.$$

Het belangrijke hieraan is dat je voor elk object X een en slechts een pijl $N(X) \rightarrow X$ hebt. De enige functie die je op de ledige verzameling kan toepassen is gewoonweg niets doen, want er is geen element om de waarde van te berekenen. Op dezelfde manier is er ook voor elk object X een unieke pijl $X \rightarrow P(X)$ die alles op het unieke element afbeeldt. Elk object past dus in een rijtje

$$\emptyset \rightarrow X \rightarrow *.$$

Als de ledige verzameling het absolute niets voorstelt en $*$ het ‘pure zijn’ voorstelt (Nietzsche’s *Sein*), dan zegt deze samenstelling dat alles, ook wij, ergens tussen het niets en het pure zijn inzitten. We zijn niet leeg noch zwart-wit, we zijn genuanceerd zoals Heidegger benadrukte. Wie had kunnen denken dat abstracte wiskunde zo dicht bij diepe menselijke gedachten kon aanleunen?

Hiermee zijn we klaar om aan het echte werk te beginnen. We zullen starten van een drietal $F \dashv G \dashv H$ dat op zijn beurt zowel een adjunctie $F \circ G \dashv H \circ G$ als een equivalentie $G \circ F \cong G \circ H$ induceert. Dat we hier een equivalentie in plaats van een gelijkheid eisen komt omdat, in het algemeen, de notie van gelijkheid te strikt is. Zo zijn twee gelijkvormige driehoeken niet noodzakelijk gelijk, zelfs als ze dezelfde afmetingen hebben. Ze zijn echter wel voor de meeste toepassingen volledig evenwaardig. (Hier komen we in de extra’s en in het volgende hoofdstuk nog op terug.)

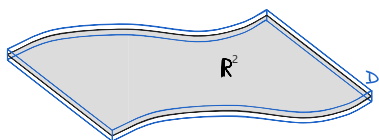
Voor onze meetkundige doeleinden zullen we starten van een doorsnee verzameling, wat op zich gewoon een hoop punten voorstelt. Meetkundige ruimtes hebben echter normaal gezien een vorm van **cohesie**, we kunnen zeggen welke punten bij elkaar horen. Om onze eenvoudige verzameling met een notie van cohesie uit te rusten, zijn er twee constructies die altijd toegepast kunnen worden. De eerste mogelijkheid is de **discrete** structuur, waarbij we alle punten als onafhankelijk beschouwen. Dit stelt eigenlijk een totaal gebrek aan cohesie voor zoals het zand in een zandloper. Aan het andere uiterste hebben we de ‘**codiscrete**’ structuur, waarbij alle punten samenhangen om één geheel te vormen zoals een massieve rots. Net zoals bij de filosofische kwestie van *Dasein* zit elke ruimte X tussen de twee uitersten in, weinig objecten zijn volledig rigide noch volledig onsamenhangend:

$$\text{Disc}(X) \rightarrow X \rightarrow \text{coDisc}(X).$$

Bovendien horen de constructies Disc en coDisc ook thuis in een drietal zoals bij de even en oneven getallen:

$$\text{Disc} \dashv \Gamma \dashv \text{coDisc}.$$

De ontbrekende stap Γ beeldt simpelweg een meetkunde ruimte af op zijn ‘onderliggende’ verzameling punten, we vergeten de manier waarop de elementen samenhangen. Het blijkt nu dat we met dit onschuldige drietal (en wat technische details die we hier niet zullen bespreken) opvallend veel eigenschappen en resultaten uit de calculus, meetkunde en andere deelgebieden kunnen reproduceren. Dit is al zeker het geval als we naar de lessen van Lawvere luisteren.



Figuur 6.3: infinitesimale verdikking van het vlak.

In Hoofdstuk 3 gebruikten we de standaard Euclidische ruimtes \mathbb{R}^n als lokale kaarten. Hier zullen we deze uitbreiden naar vlakke ruimtes met een ‘infinitesimale verdikking’: $\mathbb{R}^n \times D$, waarbij D een of meerdere infinitesimale generatoren ε bevat. In Figuur 6.3 op de volgende pagina

zien we bijvoorbeeld het gewone vlak \mathbb{R}^2 met een eendimensionale verdikking. De categorie van objecten die lokaal gemodelleerd kunnen worden op dergelijke verdikte ruimtes bevatten uiteraard nog steeds alle variëteiten die we tot nog toe tegenkwamen. Hierbij nemen we voor D simpelweg een enkel punt. Hiernaast, in het geval dat D echt nieuwe generatoren toevoegt, krijgen we een overvloed aan nieuwe, interessante objecten. Denk maar aan ruimtes van vectorvelden zoals Lawvere wou, fermionen zoals het elektron of proton, of *supersymmetrie* waar elk boson een fermionisch broertje (of zusje) krijgt en omgekeerd. Nu vraag je je misschien af wat fermionen zijn? In de natuur bestaan er twee soorten deeltjes: bosonen en fermionen. De bosonen zijn gebruikelijk de krachtdragers van de natuur. Het bijzondere hieraan is dat ze zich allemaal in dezelfde toestand kunnen bevinden. Dit gebeurt bijvoorbeeld in supergeleiders en geeft aanleiding tot een heleboel exotische fenomenen. De fermionen daarentegen gedragen zich helemaal anders. Er kunnen zich nooit twee fermionen in dezelfde toestand bevinden wat er onder andere voor zorgt dat materie zijn vaste, rigide structuur kan behouden.

Een ander soort object dat, in tegenstelling tot fermionen en supersymmetrie, niet rond antisymmetrie draait, is gerelateerd aan de ijktheorieën uit het vorige hoofdstuk. Om de volledige structuur van Yang–Millstheorieën theoretisch te beschrijven, zijn er best wel veel concepten en berekeningen nodig, maar met de synthetische aanpak uit dit hoofdstuk wordt dit één enkele pijl:

$$\nabla : M \rightarrow \mathbf{BG}_{\text{conn}}.$$

Dat deze pijl heel wat details wegsteekt, is dan natuurlijk geen verrassing. Het punt is echter dat we resultaten kunnen aantonen voor algemene pijlen en dat deze dan geldig zijn in alle theorieën van deze vorm. Iets wat vroeger enkel geldig leek in heel eenvoudige of specifieke gevallen, of zelfs in totaal ongerelateerde gevallen, kan op deze manier snel veralgemeend worden. Zo stelt deze pijl zowel een keuze van meetkundige ruimte, een keuze van ijkveld en de manier waarop ze transfermeren voor.

Om dit hoofdstuk af te sluiten bespreken we nog twee verwante eigenschappen van het soort categorieën dat we hier gebruikt hebben (*topoi* voor de echte specialisten). De pijl $M \rightarrow \mathbf{BG}_{\text{conn}}$ hierboven ‘classificeert’ ijktheorieën, maar wat betekent het om te classificeren? Laten we hiervoor een veel eenvoudiger geval bekijken waarbij we in de plaats van M een doodgewone verzameling zonder exotische extraatjes nemen en in de plaats van $\mathbf{BG}_{\text{conn}}$ de verzameling $\{\text{waar, vals}\}$, de klassieke waarheidswaardes. Een functie $X \rightarrow \{\text{waar, vals}\}$ associeert met elk element in X een waarheidswaarde en deelt de verzameling dus op in twee groepen. Zo een functie komt dus eigenlijk overeen met een klassieke stelling of propositie. Neem als voorbeeld terug de natuurlijke getallen \mathbb{N} en de propositie “ $n \in \mathbb{N}$ is even”. Deze uitspraak kan worden voorgesteld door de volgende functie:

$$\mathbb{N} \rightarrow \{\text{waar, vals}\} : n \mapsto \begin{cases} \text{waar} & \text{als } n \bmod 2 = 0, \\ \text{vals} & \text{als } n \bmod 2 = 1. \end{cases}$$

We kunnen voor elke mogelijke uitspraak over (de elementen van) een verzameling een bijhorende pijl naar $\{\text{waar, vals}\}$ vinden en, wat blijkt, een

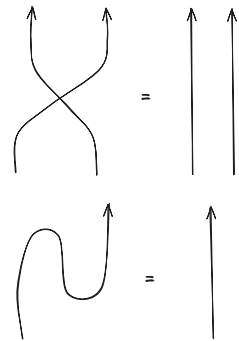
groot fragment van de klassieke logica kan vertaald worden in termen van de categorische structuur van deze pijlen. Hoe groot dat fragment is, hangt natuurlijk af van de categorie waarvan we vertrekken.

In het algemeen zal dit bijvoorbeeld enkel de zogenaamde **intuitionistische logica** van Brouwer en Heyting zijn. In het dagelijkse leven zijn er een aantal argumenten of logische stappen die voor ons vanzelfsprekend zijn. Zo zal elke uitspraak (mits genoeg informatie) ofwel waar ofwel vals zijn, er is geen middenweg. Bovendien zeggen we in de wiskunde vaak “kies een...” zonder echt te zeggen wat of hoe we dat kiezen precies doen. Rond de 20^e eeuwswisseling waren er echter enkele wiskundigen die niet meer akkoord gingen met deze logica. Als je niet expliciet kon zeggen hoe je iets kiest of waarom iets al dan niet waar is, hoe kan je dan met zekerheid jouw redeneringen (logisch) onderbouwen? In de constructieve of intuitionistische logica moet je dus voor alles een expliciete constructie of redenering kunnen neerschrijven. Wiskundigen binnen deze strekking doen niet mee aan de *wet van het uitgesloten midden* of aan het *keuzeaxioma*. Voor sommige doeleinden is dit zelfs niet zo heel gek, want in de kwantummechanica is ook niet alles zwart of wit. Superpositie zorgt ervoor dat proposities over kwantumsystemen van een heel andere aard zijn dan onze ‘gewone’, klassieke logica. Een belangrijk, hedendaags vakgebied is het bestuderen van de kwantumlogica en hoe dit gerelateerd is aan kwantumcomputers. Er bestaat een belangrijke drievuldigheid in de logica: de overeenkomst van Curry–Howard–Lambek. Volgens deze overeenkomst is er een equivalentie tussen een specifiek soort categorieën, de intuitionistische logica en λ -calculus, de familie der functionele programmeertalen. Door het type categorieën of, equivalent, het type logica te wijzigen, kunnen we dus ook proberen een geschikte programmeertaal voor kwantumcomputers te vinden. Indien we zo een geschikte categorie vinden met een geschikte vervanger voor {waar, vals} dan kunnen we een interne logica proberen bouwen die de kwantummechanica beschrijft. Indien we in plaats van verzamelingen onze goede vrienden de vectorruimtes gebruiken, dan krijgen we bijvoorbeeld zo goed als gratis de *no-cloning*- en *no-deletion*stellingen als resultaat, die stellen dat je de informatie in kwan-

tumssystemen niet kan kopiëren of vernietigen. Op eenzelfde manier kunnen we ook proberen de filosofie wat te helpen met een geschikte taal te vinden. Wat bijvoorbeeld met uitspraken zoals “de zon zal ooit opkomen” of “een bol is noodzakelijk rond”? Ook voor deze *modale logica* kan je geschikte categorieën vinden, zo geschikt zelfs dat ze in volgend hoofdstuk opnieuw (kort) zullen opduiken aangezien de adjuncties die we in dit hoofdstuk geïntroduceerd hebben sterk verwant zijn aan zogenaamde [modaliteiten](#).

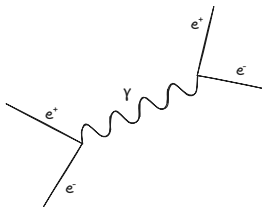
Naast een nieuwe taal voor filosofie en logica biedt de categorietheorie ons nog een ander hulpmiddel. We kunnen de pijlen in een categorie ook visueel voorstellen. De algebraïsche eigenschappen van die pijlen kunnen dan vertaald worden in ruimtelijke eigenschappen zoals in de *snaardigrammen* hiernaast. Daar zien we bijvoorbeeld een diagrammatische voorstelling van de commutativiteit van twee operaties en de *zigzagrelatie* voor vectorruimtes en hun dualen. Dergelijke diagrammatische technieken zijn uiterst populair in alle takken van de wetenschap. Denk maar aan netwerkdiagrammen, schakelschema’s en causal diagrammen [5]. Ze

laten ons toe om grote hoeveelheden informatie tegelijkertijd op een compacte manier weer te geven en te manipuleren. Ze duiken trouwens ook op in de context van vorig hoofdstuk in de vorm van Feynmandiagrammen (de lezers van de extra’s zullen zich deze misschien nog herinneren). Dergelijke diagrammen geven aan hoe (sub)atomaire deeltjes zich doorheen ruimte en tijd bewegen en met elkaar interageren. We kunnen de twee voorgaande diagrammen ook eens proberen interpreteren binnen de deeltjesfysica. De commutativiteit impliceert bijvoorbeeld dat we twee deeltjes zouden kunnen omwisselen van plaats zonder de fysische toestand te wijzigen, het definieert bosonen! Het linkerlid van het onderste diagram stelt dan weer een proces voor waarbij een deeltje door de ruimte



Figuur 6.4: Snaardigrammen.

vliegt, er plots uit het niets (ook wel het **vacuüm** genoemd) een deeltje-antideeltjespaar ontstaat, het antideeltje annihileert met het oorspronkelijke deeltje en het overblijvende deeltje verder vliegt. (Ook al klinkt dit bizar, het gebeurt continu rondom ons. Zonder dergelijke processen zou het universum zoals wij het kennen niet kunnen bestaan.) Dat dit gelijk zou zijn aan de eenvoudige situatie van een vrij rondvliegend deeltje geldt echter enkel in sommige speciale theorieën genaamd *topologische veldentheorieën*.



Figuur 6.5: Feynman-diagram voor ‘Bhabha-verstrooiing’.

Dergelijke Feynmandiagrammen bevatten de uiterst complexe formules die wetenschappers in onder meer CERN gebruiken om voorspellingen te maken. Zonder dit boekhoudkundig hulpmiddel zouden zowel de theoretische als de experimentele fysica nergens staan! Het diagram hiernaast stelt bijvoorbeeld onderstaande formule voor (waar we eigenlijk al enkele vereenvoudigingen hebben doorgevoerd):

$$\mathcal{M} = e^2 (\bar{v}_k \gamma^\mu u_p) \frac{1}{(k+p)^2} (\bar{u}_{p'} \gamma_\mu v_{k'}).$$

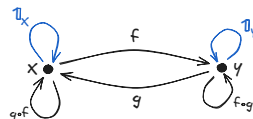
Wat al die symbolen betekenen, dat laten we over aan het mysterie! De fysische interpretatie is echter eenvoudiger. Een elektron en zijn antideeltje, het positron, annihileren waarbij ze een (virtueel) foton produceren. Dit hoogenergetisch foton vervalt na een tijdje opnieuw tot een elektron en positron. Bovenstaande formule stelt de kans voor dat een dergelijk proces plaatsvindt.

Extra's

We zullen hier twee facetten uit dit hoofdstuk wat verder toelichten. Enerzijds zullen we een specifiek soort categorie die belangrijk is in de algebra

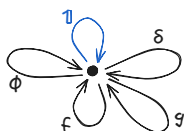
bespreken. Anderzijds zullen we een extra voorbeeld van de diagrammatische calculus bekijken. Beide voorbeelden spelen een belangrijke rol in zowel de pure wiskunde als de theoretische fysica. Ook al hebben veel wetenschappers het niet bewust door, toch gebruiken ze deze concepten (direct of indirect) de hele tijd.

De definitie van een categorie zei dat er voor elk object X een identiteit $\mathbb{1}_X : X \rightarrow X$ bestaat en voor elke twee pijlen $X \rightarrow Y$ en $Y \rightarrow Z$ een samenstelling $X \rightarrow Z$. In het geval van pijlen $f : X \rightarrow Y$ en $g : Y \rightarrow X$, geven de twee samenstellingen lussen op X en Y zoals hiernaast afgebeeld. Maar in welke gevallen zouden die lussen $f \circ g$ en $g \circ f$ samenvallen met de identiteiten? Wel, dat is exact wanneer f en g inversen zijn (zoals de Jacobianen in Hoofdstuk 3):



Figuur 6.6: Identiteiten.

$$f \circ g = \mathbb{1}_Y \quad \text{en} \quad g \circ f = \mathbb{1}_X.$$



Figuur 6.7: ‘Ontlissing’ van een groep.

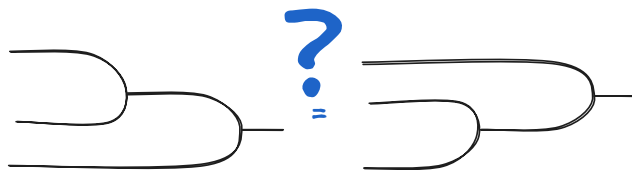
We kunnen dus de gekende notatie $g = f^{-1}$ of $f = g^{-1}$ gebruiken. Dit idee zou normaal al van op school gekend moeten zijn, maar dat het nog steeds een van de meest fundamentele concepten in de hedendaagse wiskunde vormt, is misschien wel nieuw. Stel je nu voor dat je een categorie hebt waar alle pijlen een inverse hebben. Wat we ook zouden doen in zo een categorie, we kunnen altijd terugkeren naar de begintoestand, alles is omkeerbaar. (Dit in tegenstelling tot ons universum waar de tweede wet van de thermodynamica hier een stevig stokje voor steekt.) Een dergelijke categorie wordt ook wel een **groepoïde** genoemd.

Vooraleer we kijken voor wat deze zoal nuttig zijn (zie ook volgend hoofdstuk), zullen we eerst eens kijken vanwaar die gekke naam komt. De eenvoudigste soort groepoïden hebben maar één enkel object, zoals in de figuur hierboven. Aangezien we maar één object hebben, kunnen we

dus de hele categorie beschrijven door enkel naar de verzameling van pijlen te kijken en in die verzameling bestaat er voor elk element f een invers element f^{-1} . Als we nu de samenstelling zien als een vermenigvuldiging, dan krijgen we hier een heel belangrijk algebraïsch object: een **groep**. Als we de groep aanduiden met G , dan wordt de bijhorende groeppoïde waarbij G de pijlen classificeert vaak aangeduid met \mathbf{BG} . Herken je dat symbool nog? Een ander voorbeeld wordt gegeven door de natuurlijke getallen die een groep onder de optelling vormen of de reële getallen (verschillend van nul) die een groep onder de vermenigvuldiging vormen. Als je die twee structuren samenneemt dan volgt dat de reële getallen nog veel meer structuur hebben. Ze vormen zowel een groep onder de optelling (met nul erbij) als onder de vermenigvuldiging (zonder nul) en die twee voldoen aan de *distributiviteitseigenschap*. Zo een object wordt een **veld** genoemd, al mag je dit niet verwarren met de velden uit Hoofdstuk 5. Algebraïsche velden zoals de reële of complexe getallen geven de coëfficiënten voor vectorruimtes.

Groepen en, meer algemeen, groeppoïden komen veel voor in de wetenschap en natuurkunde bij de beschrijving van symmetrieën. Aangezien een symmetrietransformatie de structuur van een object ongewijzigd laat, zijn ze altijd omkeerbaar, vandaar de groepsstructuur. Dit is dus ook de reden waarom de groeppoïde \mathbf{BG} , en zijn exotische variant $\mathbf{BG}_{\text{conn}}$, opdoeken in de synthetische beschrijving van ijktheorieën. We hadden ook de belofte gemaakt dat we nog een toepassing van de diagrammatische technieken zouden zien en hiervoor vormt veldentheorie ook het ideale aanknopingspunt.

In de deeltjesfysica zijn creatie en annihilatie twee uiterst belangrijke concepten. Deeltjes botsen niet enkel zoals in de klassieke mechanica, ze versmelten, veranderen en verdwijnen. Kijk eens naar de figuur bovenaan de volgende pagina. De twee diagrammen kunnen geïnterpreteerd worden als Feynmandiagrammen waarbij drie deeltjes op twee verschillende manieren samensmelten tot een finaal deeltje. Uiteraard zijn dergelijke diagrammen niet altijd mogelijk in de deeltjesfysica, hiervoor moeten deeltjes met hun eigen soort kunnen interageren en versmelten, wat bij



Figuur 6.8: Associativiteit van de vermenigvuldiging.

voorbeeld niet zo is voor de meeste gekende deeltjes (elektronen, fotonen, etc.). Indien we veronderstellen dat de twee diagrammen wel kunnen bestaan, kunnen we vragen of ze gelijk zijn aan elkaar, die vraag is zelfs zo gek nog niet. We kunnen de diagrammen ook interpreteren als het vermenigvuldigen van getallen. Het linker diagram zegt dan wat er gebeurt als we eerst de eerste twee getallen vermenigvuldigen en dat resultaat met het derde, terwijl het rechter diagram zegt wat er gebeurt als we eerst het tweede en derde getal vermenigvuldigen. De gelijkheid van die twee diagrammen zegt dan exact dat de vermenigvuldiging associatief is!

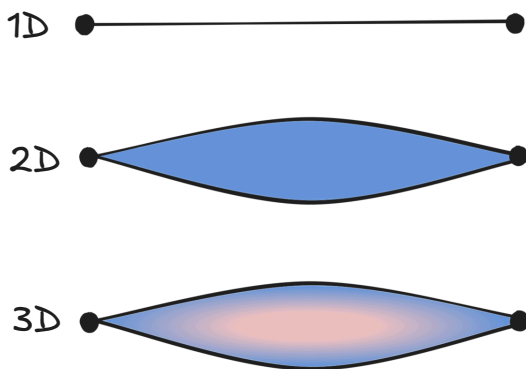
Het vertalen van algebraïsche vergelijkingen naar tekeningen is natuurlijk niet het enige dat we kunnen doen, we kunnen ook in de andere richting werken. Neem eens die twee diagrammen en spiegel ze horizontaal (dus ten opzichte van de verticale as). Dan gaan we van één naar twee en daarna zelfs naar drie deeltjes of, in het algemeen, objecten. We krijgen dus een soort *covermenigvuldiging* en de gelijkheid van de diagrammen impliceert een soort *coassociativiteit*. Als we dit letterlijk zouden nemen en de vergelijkingen zouden uitwerken, dan zou blijken dat dit neerkomt op een exotisch wiskundig object dat het exacte spiegelbeeld vormt van gekende algebraïsche structuren. Door simpelweg wat met onze tekeningen te spelen, herontdekken we hele nieuwe vakgebieden! Als je dit doortrekt, kom je terecht in de mysterieuze wereld van de *kwantumgroepen* en *niet-commutatieve meetkunde* waarin men meetkundige ruimtes bestudeert met coördinaten en functies die niet commuteren zoals we gewend zijn.

Hoofdstuk 7

To infinity and beyond

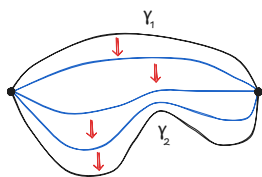
Dit laatste hoofdstuk kan gezien worden als een voortzetting van het werk van Lawvere en is wat korter van aard (maar daarom niet noodzakelijk eenvoudiger). Dit boek startte van de opmerking dat een van de redenen waarom fysica in het middelbaar soms als moeilijk of saai ervaren wordt, is dat scholieren eigenlijk te weinig voorkennis hebben om alles te begrijpen en om de juiste intuïtie te hebben. Het zou dus niet eerlijk zijn om hier ook in te vervallen. De inhoud van dit hoofdstuk is nog steeds het onderwerp van hedendaags onderzoeken en wetenschappelijke artikelen van honderden pagina's die maar door een handvol wetenschappers begrepen worden, zijn zeker niet de uitzondering. We zullen alles dus een beetje vanop afstand proberen te schetsen. Overslaan is echter geen optie, want de wiskunde is te mooi en te leuk!

Om te zien hoe de meetkunde, algebra en fysica elkaar nog maar eens ontmoeten in ons verhaal, zullen we de figuur bovenaan de volgende pagina gebruiken als leidraad. We zullen hetzelfde parcours meerdere keren herbeginnen, maar het verhaal elke keer vanuit een ander standpunt benaderen: meetkundig, algebraïsch, logisch en, als laatste, fysisch. Als eerste beschouwen we een eendimensionale ruimte. In één dimensie zijn



Figuur 7.1: Hoger-dimensionale structuren.

er twee mogelijkheden om twee punten te verbinden. Ofwel verbinden we ze met een (rechte) lijn, ofwel verbinden we ze niet. Als je in een een-dimensionaal universum leeft, is er maar één mogelijk pad tussen eender welke twee locaties. Als tweede stap kunnen we diezelfde twee punten beschouwen, maar deze keer in een tweedimensionale wereld zoals het vlak.



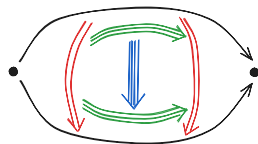
Figuur 7.2: Een homotopie tussen paden.

Nu bestaat er een hele waaier aan mogelijke paden tussen de twee punten, want elke curve ertussen is een mogelijkheid. Bovendien kunnen we nu ook naar de ruimte tussen die twee paden kijken: Pad(γ_1, γ_2). Aangezien we vast zitten in twee dimensies krijgen we echter opnieuw een beetje de situatie uit één dimensie, want tussen elke twee paden valt er een uniek oppervlak in te vullen.

Dit oppervlak stelt een soort pad van paden voor zoals in de figuur hiernaast en noemen we ook wel eens een **homotopie**. Gaan we nu nog een dimensie hoger, dan kunnen de paden nu ook uit het vlak kronkelen en hebben we bijgevolg tussen elke twee paden ook niet meer een uniek oppervlak, we krijgen nu een veelvoud aan mogelijke oppervlakken. Leggen we echter twee paden vast en kiezen we dan twee

oppervlakken tussen deze paden, dan bestaat er opnieuw maar een uniek volume tussen de oppervlakken. Op dit punt zou de logica wel duidelijk moeten zijn, we hebben d -dimensionale objecten met daartussen een verzameling aan $(d+1)$ -dimensionale objecten en tussen twee van die objecten hebben we een verzameling aan $(d+2)$ -dimensionale objecten enzovoort.

Algebraïsch komt dit overeen met hoe we van verzamelingen naar categorieën zijn overgegaan. Elke twee elementen van een verzameling zijn ofwel gelijk ofwel verschillend. Overgaan naar categorietheorie komt neer op het toevoegen van een dimensie [2]. Twee punten (of objecten) kunnen nu verbonden worden door meer dan één pijl, maar twee pijlen zijn noodzakelijk ofwel gelijk ofwel verschillend. Met andere woorden, de ruimte van pijlen $\text{Fun}(X_1, X_2)$ is een verzameling, maar de ruimte van pijlen tussen twee pijlen $\text{Pad}(\gamma_1, \gamma_2)$ is ofwel leeg ofwel een punt $*$. Het verder toevoegen van dimensies komt algebraïsch neer op de overgang naar 2-categorieën en uiteindelijk naar n -categorieën. We hebben dan niet enkel objecten met pijlen tussen de objecten, maar we krijgen ook pijlen tussen pijlen enzovoort. Deze worden ook wel n -morfismen genoemd. We kunnen dan bijvoorbeeld vragen wat de symmetrieën van een bepaald 3-morfisme zijn of hoe we een 5-morfisme met een 2-morfisme kunnen combineren.



Figuur 7.3: Hogere pijlen in een *tetracategorie*.

Het probleem is nu echter dat de beschrijving van dergelijke hogere categorieën snel onhandelbaar wordt, zelfs voor wiskundigen. De veralgemening van de associativiteit van de samenstelling van morfismen neemt bijvoorbeeld 16 pagina's in beslag voor 4-categorieën. (Zoek het K_6 -associahedron maar eens op als je dit niet gelooft.) Ter verduidelijking, met de discussie uit vorig hoofdstuk over de relatie tussen groepen en groepoiden in het achterhoofd, komt de associativiteit van samenstelling in een categorie eigenlijk neer op de associativiteit van de gewone vermenigvuldiging, een voorwaarde die op één lijn past, zelfs als je groot schrijft. Voor 4-categorieën blijft dit in zekere zin één vergelijking, maar wel een

die 16 pagina's beslaat. De oplossing voor dit probleem? We definiëren eerst ∞ -categorieën en zien de lager-dimensionale categorieën als speciale gevallen. Er doen op dit moment meerdere concurrenten de ronde voor wat die definitie precies zou moeten zijn, maar ze zijn wel allemaal gebaseerd op onze meetkundige analogie. Die gigantische vergelijking van 16 pagina's, het *associahedron*, is trouwens een soort vierdimensionaal meetkundig object.

Als derde bekijken we een interpretatie van de meetkundige constructies uit voorgaande paragrafen die nauw aansluit bij de discussie over logica in het vorige hoofdstuk. In de klassieke logica zoals we die in het dagelijkse leven toepassen, is een stelling ofwel waar of vals. Het kan niet beide zijn. Bovendien doet het er in de praktijk niet toe hoe we de waarheid (of valsheid) aantonen, het is enkel het resultaat dat telt. Dit lijkt heel goed op de meetkundige situatie in één dimensie. Maar stel nu dat we belang hechten aan hoe we onze stelling hebben aangetoond of ontkracht. Niet alle bewijzen zijn bijvoorbeeld even krachtig. Hoe minder aannames je maakt, hoe krachtiger het resultaat (denk bijvoorbeeld terug aan de intuïtionistische versus klassieke logica in voorgaand hoofdstuk). Dit komt overeen met het tweedimensionale scenario. Tussen elk twee paden, die in de logica overeen zouden komen met bewijzen of equivalenties, zit al dan niet een oppervlak, wat in de logica dan weer zou overeenkomen met een equivalentie van equivalenties. Aan de hand van dergelijke meetkundige intuïties zouden we misschien een meer verfijnd soort logica kunnen bekomen. Uiteraard hebben wiskundige dit geprobeerd en zijn ze erin geslaagd om dit te doen werken [7]. Het resultaat heet (homotopie)typetheorie (afgekort 'HoTT') en is sterk verwant aan hoe computers denken en werken. Tegenwoordig worden bepaalde versies van deze logica bijvoorbeeld gebruikt om wiskundige bewijzen om te zetten in computercode om de bewijzen op een automatische manier te kunnen verifiëren (zoals in *Agda* en *Coq*).

Laten we nu ook eens kijken wat deze meetkundige of 'homotopische' redeneringen kunnen bieden aan de natuurkunde. Hiervoor keren we helemaal terug naar Hoofdstuk 1 waar we energie en kracht bespraken. Wat

we daar niet expliciet besproken hebben, is het concept van arbeid (al zagen we in Hoofdstuk 2 wel het nauwverwante vermogen). De eerste formule die je meestal leert voor de arbeid uitgevoerd door een gegeven kracht is

$$W = Fx,$$

waar x de afstand voorstelt waarover een object door de kracht F verplaatst wordt. In de latere jaren van de middelbare school worden de oefeningen wel al eens complexer en moet je soms eens deze arbeid uitrekenen aan de hand van de gevreesde *integralen*. Dit laat je toe om de arbeid voor een niet-constante kracht of voor een gekromd pad uit te rekenen. In het geval van conservatieve krachten, die krachten waarvoor

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

geldt, gebeurt nu iets heel bijzonder. Voor eender welke twee paden die dezelfde begin- en eindpunten hebben, zoals in Figuur 7.1 aan het begin van dit hoofdstuk, zal de verrichte arbeid hetzelfde zijn! Deze hangt niet af van het gekozen pad. Laat ons als analogie nogmaals door de Vlaamse Ardennen wandelen (waarbij we opnieuw als een rasechte fysicus de wrijving verwaarlozen want die is immers niet conservatief). Als je een heuvel tegenkomt, heb je twee mogelijkheden: ofwel wandel je rond de heuvel ofwel wandel je erover. In het eerste geval moet je de zwaartekracht niet speciaal meer of minder tegenwerken, hij blijft constant zolang je vlak loopt. In het tweede geval moet je hem echter eerst wat meer tegenwerken tijdens de beklimming, maar tijdens de daling zal hij je net helpen om minder energie te verbruiken. Netto zal dit echter hetzelfde resultaat geven! Merk wel op dat dit uiteraard niet zegt dat je evenveel energie zal verbruiken. Jouw energieverbruik houdt bijvoorbeeld rekening met het bewegen van jouw spieren. Het is de energie die je nodig hebt om de zwaartekracht, of eender welke andere conservatieve kracht, te overwinnen die niet afhangt van het gekozen pad.

Grootheden (zowel fysische als wiskundige) die niet afhangen van het exacte pad or, meer algemeen, van de exacte vorm van de ruimte, worden

vaak **topologisch** genoemd. Ze zijn invariant onder een continue vervorming van de ruimte. Zo hoor je wel vaak eens de grap dat een wiskundige het verschil niet kent tussen een koffietas en een donut, ze hebben namelijk allebei een gat. Het aantal gaten in een oppervlak of hoger-dimensionale ruimte is een voorbeeld van een topologische grootheid. Wat blijkt nu, topologische grootheden hangen meestal enkel af van de globale eigenschappen en niet van de lokale structuur. Deze laatste is erg gevoelig voor (kleine) vervormingen en dat is net niet wat we willen. Denk maar terug aan Hoofdstuk 3 waar we de kromming van de kegel nooit hadden kunnen meten als we enkel naar lokale paden hadden gekeken. Enkel door volledig rond de kegel te lopen, zagen we een verschil in de oriëntatie van de getransporteerde raakvectoren.

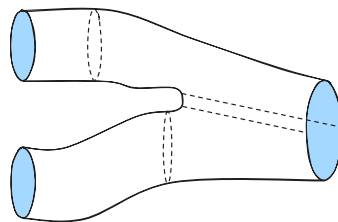
In de fysica blijkt zich nu een gelijkaardig verhaal af te spelen (onder meer omdat kromming daar zo belangrijk is). Sinds jaar en dag kijken fysici enkel naar lokale grootheden zoals afgeleiden waardoor de globale, topologische grootheden aan onze aandacht wisten te ontsnappen. Deze zijn echter uitermate belangrijk voor veel toepassingen. Een groot deel van de hedendaagse natuurkunde, van deeltjesfysica tot vastestoffysica, houdt zich bezig met de studie van topologische fenomenen. Neem bijvoorbeeld kwantumcomputers die notoir moeilijk stabiel te houden zijn omdat de *qubits*, de kwantumbits die de kwantummechanische tegenhanger van klassieke bits vormen, uiterst gevoelig zijn voor verstoring. De atomen in het materiaal van de computer springen te veel in het rond als het te warm wordt (te warm is hier trouwens al enkele graden boven het absolute nulpunt) en durven dan wel eens tegen die *qubits* te botsen met als gevolg dat de kwantumcomputer fouten maakt. Indien we echter in staat zouden zijn om de *qubits* aan de hand van topologische eigenschappen te implementeren, dan zijn dergelijke lokale botsingen totaal niet meer van belang en zouden we veel stabielere systemen kunnen bouwen.

De overgang naar hogere dimensies kan nu ook nog op een andere manier gebruikt worden in de natuurkunde. In de voorgaande paragrafen zijn we vertrokken van het begin- en eindpunt van een lijn. Fysisch komt zo een lijn overeen met de baan van een puntdeeltje doorheen de ruimte-

tijd. We kunnen echter ook naar paden van hoger-dimensionale objecten kijken zoals in *snaartheorie*. In dit geval starten we al in een hogere dimensie. Neem bijvoorbeeld gesloten snaren uit snaartheorie. Deze worden meetkundig voorgesteld door cirkels of lussen die doorheen de ruimte bewegen en het pad van zo een gesloten snaar wordt gegeven door een (mogelijks vervormd) cilinderoppervlak (dit werkt ook voor open snaren). Indien we vertrekken van een tweedimensionaal membraan, zoals in de mysterieuze *M-theorie*, dan zouden onze paden al driedimensionaal zijn.

Op deze manier krijgen we eigenlijk dezelfde hiërarchie, maar starten we simpelweg in een andere dimensie. Zo een hoger-dimensionale variëteit die tussen twee lager-dimensionale deelvariëteiten past, zoals de cilinder tussen twee cirkels, wordt ook wel een **cobordisme** genoemd. Een van de wiskundig meer formele formalismen om kwantumveldentheorie hard te

maken, is gebaseerd op de zogenaamde **cobordismehypothese** van Baez en Dolan. Deze zegt dat een kwantumveldentheorie neerkomt op een consistente toewijzing van kwantumtoestanden aan variëteiten en lineaire operatoren tussen kwantumtoestanden aan cobordismen tussen de overeenkomstige variëteiten. Cobordismen tussen variëteiten vormen echter niet zo maar een categorie, ze vormen een n -categorie. Dit is opnieuw het gevolg van Figuur 7.1, je kan cobordismen van cobordismen beschouwen enzovoort. De hypothese uitbreiden van het categorische niveau naar het n -categorische niveau komt op zijn beurt neer op zeggen dat we voorspellingen in (hogere) kwantumveldentheorieën kunnen beschrijven aan de hand van lokale data. We mogen de ruimte opensnijden in kleine stukjes, daar onze voorspelling voor doen, en later alles weer netjes aaneenkleven. (Hoe we hier ook globale, topologische fenomenen in verwerken, dat la-



Figuur 7.4: Chirurgie van een cobordisme.

ten we voor een andere keer.)

Dergelijke hoger-dimensionale objecten zoals snaren en membranen zijn trouwens niet de exclusieve eigendom van de snaartheorie. In de huidige natuurkundige theorieën komen uitgestrekte objecten ook voor, al wordt hier niet zo vaak over gesproken. Snaartheorie is bovendien ontstaan uit de studie naar de gekende sterke kernkracht en was dus oorspronkelijk niet een theorie van kwantumzwaartekracht. Bijna elke moderne theorie maakt op een of andere manier gebruik van dergelijke lokale puzzels.

Extra's

Gezien de inhoud van dit hoofdstuk is het niet zo eenvoudig om uitweidingen te vinden die niet volledig ontsproten in termen van complexiteit. Toch zijn er twee de moeite om eens te bekijken. De ene is zuiver wiskundig en is gerelateerd aan de logische grondslagen van de huidige wetenschap. De andere is geïnspireerd door de (niet zo) fysische spookdeeltjes uit Hoofdstuk 5.

In het vorige hoofdstuk hebben we meerdere keren over ‘constructies’ op of tussen categorieën gesproken. Deze structuurbehoudende transformaties tussen categorieën worden ook wel **functoren** genoemd. Structuurbehoudend wil zeggen dat het de definiërende eigenschappen bewaart, zoals functies tussen verzamelingen of operatoren de lineaire structuur van vectorruimtes. De basiseigenschappen van een categorie waren het bestaan van identiteiten en samenstelling van compatibele morfismen. Een functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ hoort dus aan de volgende eigenschappen te voldoen:

$$F(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{F(X)} \quad \text{en} \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

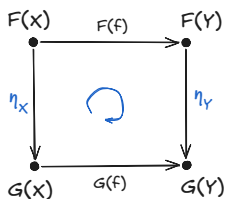
Voor we verder gaan met de ‘categorie der categorieën’, eerst nog een voorbeeld van hoe functoren hadden kunnen opduiken in ons verhaal. De

twee voorwaarden hierboven zouden je kunnen herinneren aan vergelijkingen die we eerder gezien hebben, in Hoofdstuk 5 om precies te zijn. Daar zagen we dat we meetkundige objecten konden definiëren aan de hand van transitiefuncties g_{UV} die moesten voldoen aan de voorwaarden

$$g_{VU}^{-1} = g_{UV} \quad \text{en} \quad g_{WU} = g_{WV} \circ g_{VU}.$$

Als we dit nu naast de voorwaarden voor een functor leggen, dan kan je zien dat elke functor de voorwaarden voor transitiefuncties zal behouden! Als we dus van een variëteit vertrekken en zowel op de lokale ‘stukken’ U als de transitiefuncties g_{UV} een functor F toepassen, dan krijgen we een nieuwe meetkundig object, ook wel een (vezel)bundel genaamd, met lokale ‘stukken’ $F(U)$ en transitiefuncties $F(g_{UV})$. Het voorbeeld dat wij zagen was de raakbundel TM , waarbij de functor op functies gegeven werd door de Jacobiaan. Meer algemeen krijgen we voor elke functor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ op de categorie van verzamelingen, een geïnduceerde functor $\tilde{F} : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Bundel}$ van variëteiten naar bundels. Op deze manier kunnen we ook de differentiaalvormen en tensoren of meer exotische objecten zoals *spinoren* verkrijgen. Deze laatste vormen een soort vierkantswortels van raakvectoren en zijn belangrijk in de beschrijving van de fermionen. De u ’tjes en v ’tjes in de uitdrukking horende bij het Feynmandiagram voor Bhabha-verstrooiing uit vorig hoofdstuk zijn bijvoorbeeld spinoren (zie Figuur 6.5).

Bovenstaande paragraaf is opnieuw een prachtig voorbeeld van hoe categorietheorie ons toelaat om specifieke constructies, zoals die van raakruimten en raakbundels, te veralgemenen door een stapje achteruit te zetten en de constructie te abstraheren. Al je even doorbijt en je door wat abstractere berekening heen slaat, dan krijg je een heleboel (mogelijks nieuwe) resultaten gratis. Bovendien is het ook op deze manier dat we die mysterieuze pijl $\nabla : M \rightarrow \mathbf{BG}_{\text{conn}}$ moeten interpreteren. Dit is een soort (hogere) natuurlijke transformatie tussen (hogere) functoren die de algebraïsche incarnatie geven van meetkundige objecten.



Figuur 7.5: Een natuurlijke transformatie.

Nu keren we terug naar de vraag “Vormen alle categorieën met hun functoren dan opnieuw een categorie?” Uiteraard is dit een logische vraag, maar het verleden leert ons dat het een gevaarlijke is. Rond de 19^e eeuwswisseling stelden wiskundigen zich deze vraag voor verzamelingen. Bestaat er een verzameling van alle verzamelingen? Indien ja, dan zou deze verzameling zichzelf moeten bevatten en dat leidt tot allerlei gekkigheden en inconsistenties zoals

Russell's paradox: Bevat de verzameling van alle

verzamelingen die niet zichzelf bevatten zichzelf? Om exact dezelfde reden kunnen we niet spreken over de categorie van alle categorieën (en functoren). We moeten ons beperken tot ‘kleine categorieën’, al zijn die gelukkig nog steeds groot genoeg om zo goed als alle interessante fenomenen te beschrijven. De link met dit hoofdstuk is dat die (grote) categorie eigenlijk een 2-categorie is en we moeten dus op zoek naar 2-morfismen! De geschikte definitie hiervoor is hierboven afgebeeld. Een **natuurlijke transformatie** tussen twee functoren $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ bestaat uit een familie van (1-)morfismen, een voor elk object in de categorie, zodat voor elk ander morfisme $f : X \rightarrow Y$ de twee samengestelde pijlen gelijk zijn:

$$G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f).$$

Een eenvoudig voorbeeld hiervan, deze keer in de context van computerwetenschappen, is het verwerken van lijsten. Types of klassen van objecten (sorry voor de mensen die geen fan zijn van object-georiënteerd programmeren) komen overeen met de objecten van een categorie. (Lichtjes verwarrende naamgeving, maar de grondleggers van object-georiënteerd programmeren waren niet echt bezig met categoriëtheorie.) Een belangrijke functor in deze context is de `lijst`-functor die elk type X afbeeldt op het type `Lijst(X)`. Een object van het type `Lijst(X)` komt uiteraard overeen met een lijst van objecten van het type X en `lijst` werkt in op functies door ze toe te passen op elk object in een lijst. (Dit staat ook gekend als *(f)apply* of *(f)map* in sommige programmeertalen.) Een mooi voorbeeld

van een natuurlijke transformatie $\text{lijst} \Rightarrow \text{id}$ is degene die het eerste element van een lijst teruggeeft. Eerst een functie toepassen op alle elementen en dan het eerste element nemen, of eerst dat element nemen en dan de functie toepassen, is zonder twijfel hetzelfde.

Nu gaan we over naar een totaal ander onderwerp, waar de hogere categorietheorie een expliciete rol speelt. In Hoofdstuk 5 zagen we kort hoe spookdeeltjes helpen om de ijkvrijheden in een algemene veldentheorie op een algebraïsche manier te beschrijven. Hier zullen we dit in wat meer detail bespreken en ook zien hoe het gerelateerd is aan de hogere categorietheorie. We beschouwen een algemene faseruimte met bewegingsvergelijkingen $\mathcal{E}_i(\phi) = 0$. (De faseruimte kan in dit verhaal zowel eindig- als oneindig-dimensionaal zijn.) We veronderstellen ook dat er $k \in \mathbb{N}$ ijktransformaties bestaan:

$$\mathcal{E}_i(\delta_k \phi) = 0.$$

Deze vergelijking zegt dat een dergelijke ijktransformatie $\delta_k \phi$ van de velden de oplossingsverzameling onveranderd laat. Neem nu als eenvoudige analogie eens de beweging van een deeltje doorheen de ruimte waarbij de vergelijkingen niet afhangen van de eerste coördinaat. Dit betekent dat we zowel een overbodige coördinaat q^1 in onze oplossingsruimte hebben als dat sommige oplossingen aan elkaar kunnen worden gerelateerd.

Het idee is om extra coördinaten in te voeren die in zekere zin de transformatierelaties omzetten van vergelijkingen met afgeleiden naar pure algebraïsche vergelijkingen (zoals veeltermvergelijkingen). Dit is onder andere gerelateerd aan de de (co)homologie die opdook in Hoofdstuk 5. In dergelijke theorieën valt alles mooi algebraïsch te beschrijven, dus we zoeken een structuur waarvan de cohomologie gelijk is aan de ruimte van functies op onze faseruimte. We moeten hier echter opletten, want de faseruimte telt altijd een even aantal dimensies. Voor elke nieuwe coördinaat moeten we dus ook een bijhorende impuls toevoegen. We voegen nu zo een **spook-antispoek**koppel (c, π) toe voor elke ijkvrijheid, in ons geval zijn dat er k . Functies zoals de Lagrangiaan of Hamiltoniaan zullen dan ook moeten worden uitgebreid tot functies van de argumenten (q, p, c, π) ! Deze

beschrijving was oorspronkelijk een nogal ad-hoc oplossing om oneindigheden ten gevolge van ijkvrijheden te voorkomen, maar achteraf bleek dat het invoeren van spoken en antispoken een algebraïsche formulering toelieten. Wat bleek, de spoken implementeren het ‘weggooien’ van de overbodige dimensies (wat we een quotiënt genoemd hebben in het vorige hoofdstuk), terwijl de antispoken de relaties tussen de functies op de faseruimte implementeren.

Deze theorie werd trouwens al impliciet door Dirac gebruikt vooraleer het idee van ijkvrijheden gekend was in de veldentheorie. Hij gebruikte het voor de beschrijving van mechanische systemen met beperkingen of voorwaarden, zoals een knikker die over een tafel rolt en dus beperkt is in zijn bewegingsvrijheid. Hierbij is de hoogte (de z -coördinaat) constant, maar kunnen we ook eender welke twee functies $f(x, y)$ en $f(x, y) + g(z)$ identificeren aangezien deze op een volledig triviale manier van elkaar verschillen gegeven de voorwaarde $z = \text{constant}$. Maar wacht eens even. De bewegingsvergelijking $\mathcal{E}_i(\phi) = 0$ kunnen zelf ook als zo een voorwaarde gezien worden. Dus we krijgen er nog eens een aantal spookachtige coördinaten bij: de [antivelden](#)! Dit geeft aanleiding tot wat men de BV–BRST resolutie van de faseruimte noemt.¹

¹De afkortingen staan voor Batalin–Vilkovisky en Becchi–Rouet–Stora–Tyutin, van groepswerk gesproken. Andere namen die je hierbij kan tegenkomen en die meer verspreid zijn in de natuurkunde zijn Faddeev en Popov, die de spookdeeltjes oorspronkelijk hebben geïntroduceerd.

Hoofdstuk 8

Epiloog

Honderden jaren aan fysica en wiskunde in een klein boekje, dat was best een moedig plan. Dit hield echter in dat we niet enkel heel wat technische en conceptuele details moesten vermijden, maar dat we ook onderwerpen of zelfs hele deelgebieden uit de weg moesten gaan. Betekent dit dat ze minder relevant of interessant zijn dan de onderwerpen die wel besproken werden? Uiteraard niet, misschien integendeel zelfs! Het was simpelweg een noodzakelijke en deels persoonlijke keuze. Toch is het maar eerlijk om ook even stil te staan bij de onderwerpen die dit boek niet gehaald hebben (op alfabetische volgorde om het objectief te houden):

- Algebraïsche meetkunde: Een notoir abstract deelgebied van de wiskunde dat doorheen grote delen van dit boek stiekem op de achtergrond verscholen zat. Hierin worden ruimtes niet beschreven aan de hand van lokale coördinaten, maar aan de hand van de (lokale) functies die op deze ruimtes leven. In het middelbaar ben je hier eigenlijk mee bezig wanneer je bijvoorbeeld oplossingen van veeltermvergelijkingen associeert met snijpunten van curves.
- Getaltheorie: Vroeger werd dit onderwerp gezien als een zeer abstract deel van de wiskunde dat (vaak) eenvoudig uit te drukken

problemen zoals de laatste stelling van Fermat omzette in uiterst complexe problemen. Tegenwoordig komt het echter vaak voor in de theoretische fysica zoals in snaartheorie door de verborgen relaties tussen getaltheorie en meetkunde. Deze relaties vormen zowel in de natuurkunde als wiskunde een actief onderzoeksgebied met onderwerpen zoals *spiegelsymmetrie* — dit is niet de spiegelsymmetrie zoals je ze kent van vlakke figuren, het betreft een equivalentie tussen heel speciale ∞ -categorieën — en het (*meetkundige*) *Langlandsprogramma*.

- **Integraalrekening:** Minder exotisch, maar dubbel zo relevant voor eender welk soort fysica als de vorige twee onderwerpen is het berekenen van integralen. Dit valt niet meer weg te denken uit de wiskunde, natuurkunde of zelfs wetenschap in het algemeen. (In de financiële wereld zijn interestberekeningen en beursvoorspellingen eigenlijk niets anders dan integraalrekening, al zij het een speciaal soort integraalrekening). Deze tegenhanger van de differentiaalrekening wordt trouwens nog leuker wanneer je het toepast in gekromde ruimtes door middel van onze geliefde differentiaalvormen uit Hoofdstuk 5.
- **Kosmologie:** Niets dat de mens zo doet wegdromen als de wonderen van het universum. Al van in de oudheid waren we hierdoor gefascineerd. De combinatie van algemene relativiteitstheorie en veldentheorie maakt het mogelijk om fenomenen zoals zwarte gaten en de *Big Bang* te beschrijven. Hierin wordt het Standaardmodel ook nog eens uitgebreid met nieuwe deeltjes/velden zoals het *inflaton*, donkere materie en donkere energie.
- **Kwantuminformatietheorie:** *Verstrengeling* gebruiken als grondstof of basisbouwsteen voor een nieuw soort computer klinkt als een wild avontuur. Die verstrengeling tussen kwantumtoestanden is echter niet enkel nuttig voor kwantumcomputers, het helpt ook bij de beschrijving van zwarte gaten en de zogenaamde *informatieparadox*.

- **Kwantumzwaartekracht:** Een volledige unificatie van algemene relativiteitstheorie en kwantummechanica blijft ons ontsnappen, al is er zeker geen tekort aan pogingen. Denk maar aan theorieën zoals snaartheorie (of M-theorie), luskwantumzwaartekracht of causale verzamelingen. Het grote probleem is hier zowel de complexiteit van de theorie als het ontbreken van (relevante) experimenten. We kunnen niet terugkeren naar de *Big Bang* en het is voorlopig onhaalbaar om naar een zwart gat te reizen.
- **Statistische fysica:** Nog zo een vakgebied waar Einstein fundamenteel aan heeft bijgedragen. Hierin zoekt de fysica de statistiek op als bondgenoot. Zonder kansrekening zou het onhaalbaar zijn om het gedrag van grote hoeveelheden deeltjes — denk maar aan de constante van Avogadro uit de lessen chemie — te voorspellen. Tegenwoordig duiken de ideeën uit de statistische fysica ook al op in vakgebieden zoals *machine learning*.
- **Vastestoffysica:** Door theoretici soms aan de kant gezet als “slechts een toepassing”, maar toch heeft dit deelgebied mede geleid tot enkele van de grootste inzichten in de (theoretische) fysica van de afgelopen eeuw. Bovendien vinden hier tegenwoordig de grootste technologische doorbraken plaats, mede omdat ze zo belangrijk zijn in de *age of technology*.

Aangezien we de geschiedenis tot de dag van vandaag besproken hebben, is het ook moeilijk om te zeggen hoe het verhaal zal voortgaan. Er zijn heel veel ideeën binnen de theoretische fysica, maar het grootste probleem is bijna altijd het bedenken en opzetten van experimenten. Een persoonlijke gok? De komende jaren en decennia zullen (nog meer dan nu het geval) in het teken staan van natuurkunde buiten de natuurkunde, het toepassen van inzichten verkregen binnen de fysica in andere takken van de wetenschap.

Bibliografie

- [1] A. Becker. *What is Real?: The Unfinished Quest for the Meaning of Quantum Physics*. Hachette UK, 2018.
- [2] E. Cheng. *The Joy of Abstraction: An Exploration of Math, Category Theory, and Life*. Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [3] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics, Part 1: Basics*. North-Holland, 1991.
- [4] D. Corfield. *Modal homotopy type theory: The prospect of a new logic for philosophy*. Oxford University Press, 2020.
- [5] B. Fong and D. I. Spivak. *An Invitation to Applied Category Theory: Seven Sketches in Compositionality*. Cambridge University Press, 1 edition, 2019.
- [6] C. Rovelli. *Helgoland*. Penguin Books, 2022.
- [7] The Univalent Foundation Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. [\url{https://homotopytypetheory.org/book}](https://homotopytypetheory.org/book), 2013.
- [8] F. Verstraete. *Waarom niemand kwantum begrijpt*. 2023.
- [9] E. P. Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Mathematics and science*, 13:1–14, 1990.